KONSTRUKTION VON HALBGRUPPEN UND MARKOFFSCHEN PROZESSEN

---

von

Wolfhard Hansen

aus Hamburg

1967

1967 № 55

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535718_0042

KONSTRUKTION VON HALBGRUPPEN UND MARKOFFSCHEN PROZESSEN

Der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Wolfhard Hansen
aus Hamburg

Als Dissertation genehmigt von der
Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Universität Erlangen-Nürnberg

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 22.2.1967

Dekan: Prof.Dr.Klaus Brodersen

Erstberichterstatter: Prof.Dr.Heinz Bauer
Zweitberichterstatter: Prof.Dr.Konrad Jacobs

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beruht auf der Frage: Wie läßt sich auf einem harmonischen Raum der axiomatischen Potentialtheorie in einfacher Weise ein Huntscher Prozeß konstruieren, dessen exzessive Funktionen gerade die positiven hyperharmonischen Funktionen sind?

Die naheliegende Anwendung des Satzes von Hunt (s. [14], S.264) bereitet Schwierigkeiten, weil sich in einem harmonischen Raum geeignete Kerne, die im Unendlichen verschwinden, im allgemeinen nur auf regulären Teilmengen finden lassen. Daher hat P.-A.Meyer in der von M.Brelot entwickelten axiomatischen Potentialtheorie mit einer aufsteigenden Folge von regulären Mengen gearbeitet, die den Gesamtraum überdecken, auf diesen regulären Mengen mit Hilfe des Satzes von Hunt Halbgruppen von Kernen konstruiert und gezeigt, daß sie in genügend guter Weise konvergieren (s. [13]). Wegen des Fehlens großer regulärer Mengen erhält man in der allgemeineren, von H.Bauer entwickelten Theorie (s. [2]) auf diesem Wege nur lokal die Existenz eines zugehörigen Huntschen Prozesses.

N.Boboc, C.Constantinescu und A.Cornea haben daher die Existenz eines zugehörigen Huntschen Prozesses mit stetigen Pfaden ohne Verwendung des Satzes von Hunt gezeigt (s. [5]). Allerdings erfolgt die Konstruktion der Halbgruppe des Prozesses über eine Reihe von Zwischenstufen und unter fast ständiger Heranziehung der Potentialtheorie.

Die vorliegende Arbeit zeigt aber, daß es eine einfache Erweiterung des Satzes von Hunt und des zugehörigen Existenzsatzes für Prozesse gibt, die unmittelbar in der Potentialtheorie anwendbar ist.

Die Arbeit gliedert sich in drei Kapitel. Im ersten Kapitel wird die Existenz genügend guter Halbgruppen

zunächst zu Resolventen, dann zu beschränkten Kernen und schließlich auch zu unbeschränkten Kernen gezeigt. Das geschieht stets so, daß die Sätze für im Unendlichen verschwindende Kerne als Spezialfälle darin enthalten sind. In der Anwendung auf die Potentialtheorie ist dabei ein vollständiger Ersatz für das Verschwinden im Unendlichen die folgende Eigenschaft von Potentialen: Für jedes stetige Potential p ist das Infimum aller stetigen Potentiale, die unterhalb von p liegen, aber außerhalb einer kompakten Menge mit p übereinstimmen, gleich Null.

Im zweiten Kapitel wird die Konstruktion von Huntschen Prozessen zu Halbgruppen durchgeführt, wie sie sich insbesondere im ersten Kapitel ergeben. Wieder ist der Fall im Unendlichen verschwindender Kerne (Fellersche Halbgruppe) darin enthalten. Entscheidend ist die Existenz zweier gewisser λ-supermedianer Funktionen, die in spezieller Form schon bei der Konstruktion von Boboc, Constantinescu und Cornea von Nutzen war. Sie garantiert nämlich grob gesprochen die Relativ-Kompaktheit der Pfade einer zugehörigen Familie von stochastischen Prozessen, so daß Regularitätsuntersuchungen nur lokal durchgeführt zu werden brauchen. Die anschließende Konstruktion folgt dann weitgehend bekannten Vorbildern, unterscheidet sich allerdings von ihnen durch verfeinerte Abschätzungen, die durch die lokale Betrachtungsweise bedingt sind.

Im dritten Kapitel wird durch Konstruktion eines geeigneten Potentials p und zugehörigen Kernes V gezeigt, wie sich die allgemeinen Sätze der ersten beiden Kapitel mühelos auf die axiomatische Potentialtheorie von H.Bauer anwenden lassen.

Meinem verehrten Lehrer Herrn Prof.Dr.H.Bauer möchte ich sehr herzlich danken für seine langjährige Förderung und für die Unterstützung bei dieser Arbeit.

I. KERNE UND HALBGRUPPEN

§ 1. Bezeichnungen und Hilfsmittel

Wir erinnern zunächst an eine Reihe von üblichen Begriffsbildungen und bekannten Sätzen. Dabei wollen wir uns vor allem auf das Buch "Probabilités et potentiel" von P.-A. Meyer beziehen.

Es bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen, $\mathbb{R}$ die Menge der reellen und $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen. Für zwei Abbildungen f und g einer Menge M_1 in eine Menge M_2 und eine Relation R auf M_2 sei $[f\ R\ g]$ die Menge aller $x \in M_1$ mit $f(x)\ R\ g(x)$.
Für jede Menge $\mathcal{A}$ numerischer Funktionen auf einer Menge M sei $\mathcal{A}^+$ die Menge aller positiven (d.h. nicht-negativen) und $\mathcal{A}_b$ die Menge aller beschränkten Funktionen aus $\mathcal{A}$.

Sei nun $(E, \mathcal{F})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{E}$ die Menge aller numerischen, $\mathcal{F}$-meßbaren Funktionen auf E. $\mathcal{E}_b$ sei versehen mit der Supremumsnorm, und für jede Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{E}_b$ bedeute $\overline{\mathcal{A}}$ den Abschluß von $\mathcal{A}$ in diesem Banachraum.

Ein Kern auf $(E, \mathcal{F})$ ist eine positive, numerische Funktion V auf $E \times \mathcal{F}$ mit den Eigenschaften:
1. Die Abbildung $x \longrightarrow V(x,A)$ liegt in $\mathcal{E}$ für alle $A \in \mathcal{F}$.
2. Die Abbildung $A \longrightarrow V(x,A)$ ist ein Maß für alle $x \in E$.

Ein Kern V heißt eigentlich, wenn E die Vereinigung einer Folge (K_n) von Mengen aus $\mathcal{F}$ ist, so daß die Abbildungen $x \longrightarrow V(x,K_n)$ endlich sind. Er heißt beschränkt, falls die Abbildung $x \longrightarrow V(x,E)$ beschränkt ist. Er heißt submarkoffsch (bzw. markoffsch), falls $V(x,E) \leq 1$ (bzw. $= 1$) ist für alle $x \in E$. Er heißt streng positiv, falls $V(x,E) > 0$ ist für alle $x \in E$.
Für jeden Kern V auf $(E, \mathcal{F})$ ist für $f \in \mathcal{E}^+$ auch Vf,

definiert als Abbildung

$$x \longrightarrow \int f(y)\, V(x,dy),$$

aus $\mathcal{E}^+$. Für beliebiges $f \in \mathcal{E}$ wird Vf definiert als $Vf^+ - Vf^-$, falls die Differenz wohldefiniert ist.

Sei V ein eigentlicher Kern auf $(E, \mathcal{E})$. Dann wollen wir eine Funktion $d \in \mathcal{E}^+$ dominant (bezüglich V) nennen, falls für alle $f,g \in \mathcal{E}^+$

$$d + Vf \geq Vg$$

bereits dann auf ganz E gilt, wenn es auf $[g > 0]$ richtig ist. Man sagt, der Kern V genüge dem vollständigen Maximumprinzip, falls die positiven Konstanten dominant sind. Wenn das der Fall ist, dann sind offenbar sogar alle Funktionen aus $\mathbb{R}^+ + V(\mathcal{E}^+)$ dominant.

Resolvente auf $(E, \mathcal{E})$ heißt jede Familie $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ von Kernen auf $(E, \mathcal{E})$, so daß für alle $\lambda, \mu > 0$ mit $\mu > \lambda$ gilt:

$$(R) \qquad V_\lambda = V_\mu + (\mu-\lambda)\, V_\mu V_\lambda \ , \quad V_\lambda V_\mu = V_\mu V_\lambda \ .$$

Eine Resolvente (V_λ) heißt submarkoffsch, wenn alle Kerne λV_λ submarkoffsch sind. Zu jeder Resolvente existiert der Kern $V_0 = \sup V_\lambda$, und es gilt dann (R) auch für $\lambda = 0$ (s. [14], S.234).

Satz 1: Sei V ein beschränkter Kern auf $(E, \mathcal{E})$, der dem vollständigen Maximumprinzip genügt. Dann existiert genau eine submarkoffsche Resolvente (V_λ) mit $V_0 = V$.
Für jeden abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{A}$ von $\mathcal{E}_b$ mit $V(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ ist auch $V_\lambda(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ für alle λ.

Beweis: T8 und T10 auf den Seiten 254-255 von [14], wobei sich der zweite Teil des Satzes beim Beweis von T10 ergibt.

Die Konstruktion einer Halbgruppe zu einer Resolvente geschieht mit dem Satz von Hille und Yosida, der allerdings von einer etwas anderen Situation ausgeht:

Sei $\mathfrak{X}$ ein Banachraum, geordnet durch einen abgeschlossenen, konvexen, spitzen Kegel. Ein Operator A auf $\mathfrak{X}$ heißt submarkoffsch, wenn $\|A\| \leq 1$ und A positiv ist.
Eine submarkoffsche Halbgruppe auf $\mathfrak{X}$ ist eine Familie $(P_t)_{t>0}$ von submarkoffschen Operatoren auf $\mathfrak{X}$, so daß für alle $s,t > 0$ gilt

$$P_s P_t = P_{s+t}.$$

Eine solche Halbgruppe wird im allgemeinen durch $P_0 = I$ vervollständigt. Sie heißt stark stetig, falls

$$\lim_{t \to 0} \|P_t x - x\| = 0$$

ist für alle $x \in \mathfrak{X}$.
Eine submarkoffsche Resolvente auf $\mathfrak{X}$ ist eine Familie $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ von Operatoren auf $\mathfrak{X}$, so daß die Operatoren λV_λ submarkoffsch sind und die Resolventengleichung gilt:

$$V_\lambda - V_\mu = (\mu - \lambda) V_\lambda V_\mu \qquad \text{für alle } \lambda, \mu > 0.$$

Eine solche Resolvente heißt stark stetig, wenn

$$\lim_{\lambda \to \infty} \|\lambda V_\lambda x - x\| = 0$$

ist für alle $x \in \mathfrak{X}$. Es ist leicht zu sehen, daß sie genau dann stark stetig ist, wenn das von λ unabhängige Bild $V_\lambda(\mathfrak{X})$ dicht liegt in $\mathfrak{X}$ (s. [14], S.260).
Jeder stark stetigen submarkoffschen Halbgruppe (P_t) auf $\mathfrak{X}$ ist durch

$$V_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t x \, dt$$

eine stark stetige submarkoffsche Resolvente (V_λ) zugeordnet (s. [14], S.261). Die Umkehrung ist der Satz von Hille und Yosida:

Satz 2: Sei (V_λ) eine stark stetige submarkoffsche Resolvente auf $\mathfrak{X}$. Dann gibt es genau eine stark stetige submarkoffsche Halbgruppe (P_t) auf $\mathfrak{X}$, deren Resolvente (V_λ) ist.

Beweis: s. [14], S.261 ff.

Einige Lemmata dienen zur weiteren Vorbereitung. Dabei wollen wir voraussetzen:
Es sei (V_λ) eine submarkoffsche Resolvente auf $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X}_1$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{X}$, der durch die V_λ in sich abgebildet wird.

Lemma 1: Es sei $\mathcal{A}$ ein Teilraum von $\mathfrak{X}$ mit $V_\lambda(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ für alle $\lambda > 0$. Dann ist $V_\lambda(\mathcal{A})$ unabhängig von λ.

Beweis: Resolventengleichung.

Insbesondere sind also $V_\lambda(\mathfrak{X})$ und $V_\lambda(\mathfrak{X}_1)$ unabhängig von λ.

Lemma 2: Für alle $x \in \overline{V_\lambda(\mathfrak{X})}$ ist $\lim_{\lambda\to\infty} \| \lambda V_\lambda x - x \| = 0$.

Beweis: s.[14],S.260.

Lemma 3: Sei $\mathfrak{X}_0 = \overline{V_\lambda(\mathfrak{X}_1)}$. Dann ist $V_\lambda(\mathfrak{X}_0)$ unabhängig von λ und ein dichter Teilraum von $\mathfrak{X}_0$.

Beweis: Es ist

$$V_\lambda(\mathfrak{X}_0) = V_\lambda(\overline{V_\lambda(\mathfrak{X}_1)}) \subset \overline{V_\lambda(V_\lambda(\mathfrak{X}_1))} \subset \overline{V_\lambda(\mathfrak{X}_1)} = \mathfrak{X}_0.$$

Also ist stets $V_\lambda(\mathfrak{X}_0)$ in $\mathfrak{X}_0$ enthalten und daher nach Lemma 1 unabhängig von λ. Aus Lemma 2 folgt schließlich, daß $\mathfrak{X}_0$ in $\overline{V_\lambda(\mathfrak{X}_0)}$ enthalten ist.

Die Restriktionen der V_λ auf $\mathfrak{X}_0$ bilden also eine stark stetige submarkoffsche Resolvente. Aus Satz 2 erhalten wir daher: Es existiert genau eine stark stetige submarkoffsche Halbgruppe (P_t) auf $\mathfrak{X}_0$ mit

$$V_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t x \, dt$$

für alle $x \in \mathfrak{X}_0$ und $\lambda > 0$.

Lemma 4: Sei $\mu \geq 0$ und $x \in \mathfrak{X}_0^+$ mit $\lambda V_{\lambda+\mu} x \leq x$ für alle $\lambda > 0$. Dann ist für alle $t > 0$

$$e^{-\mu t} P_t x \leq x.$$

Beweis: Sei zunächst $\mu > 0$ und $\lambda > 0$. Dann ist

$$y = x - (\lambda - \mu)\, V_\lambda x \in \mathfrak{X}_0^+$$

und $V_\mu y = V_\lambda x$. Daher ist

$$P_t V_\lambda x = P_t V_\mu y = V_\mu P_t y = \int_0^\infty e^{-\mu s}\, P_s P_t y\, ds$$
$$= e^{\mu t} \int_0^\infty e^{-\mu(s+t)}\, P_{s+t} y\, ds = e^{\mu t} \int_t^\infty e^{-\mu s}\, P_s y\, ds$$
$$\leqslant e^{\mu t} \int_0^\infty e^{-\mu s}\, P_s y\, ds = e^{\mu t}\, V_\mu y = e^{\mu t}\, V_\lambda x.$$

Daraus folgt

$$e^{-\mu t}\, P_t x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\mu t}\, \lambda V_\lambda P_t x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{-\mu t}\, \lambda P_t V_\lambda x$$
$$\leqslant \lim_{\lambda \to \infty} \lambda V_\lambda x = x.$$

Sei nun $\mu = 0$. Dann ist $\lambda V_{\lambda+\mu}\, x \leqslant x$ für alle $\mu, \lambda > 0$, also $e^{-\mu t}\, P_t x \leqslant x$ für alle $\mu > 0$ und $t > 0$, also $P_t x \leqslant x$ für alle $t > 0$.

§ 2. Resolvente und Halbgruppe

Sei E ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis, $\mathfrak{S}$ das System seiner borelschen Teilmengen und $\mathcal{B}$ die Menge der numerischen borelschen Funktionen auf E. $\mathcal{C}$ sei die Menge aller stetigen reellen Funktionen auf E, $\mathfrak{K}$ die Menge aller Funktionen aus $\mathcal{C}$ mit kompaktem Träger und $\mathcal{C}_0 = \overline{\mathfrak{K}}$.

Sofern nichts anderes gesagt wird, wollen wir in diesem Paragraphen voraussetzen:
Es sei (V_λ) eine submarkoffsche Resolvente auf einem abgeschlossenen Teilraum $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}_b$, $\mathcal{B}_1$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{A}$, der mit f auch $|f|$ enthält, und es gelte

(R_1) $\quad V_\lambda(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{C}$

(R_2) $\quad \mathfrak{K} \subset \overline{\mathcal{G}^* - \mathcal{G}^*}$

(R_3) $\quad$ Es gibt ein $\lambda > 0$, so daß für alle $f \in \mathcal{B}_1^+$ gilt

$$\inf \left\{ s \in \mathcal{G}_\lambda :\ V_\lambda f - s \in \mathcal{C}_0^+ \right\} = 0.$$

Dabei sei $\mathcal{F}_\lambda$ die Menge aller $f \in \mathcal{A}^+$ mit $\mu V_{\mu+\lambda} f \leqq f$ für alle $\mu > 0$, $\mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}_\lambda$ und $\mathcal{F}^*$ die Menge aller $s \in \mathcal{F} \cap \mathcal{B}_1$, zu denen es ein $t \in \mathcal{F}$ gibt mit $s + t \in \overline{V_\lambda(\mathcal{A})}$.

Bemerkungen:

1. Für alle $\lambda > 0$ ist $V_\lambda(\mathcal{B}_1^+)$ in $\mathcal{F}^*$ enthalten. (Man kann dann stets $t = 0$ wählen.) (R_2) ist also schwächer als die Forderung $\mathcal{K} \subset \overline{V_\lambda(\mathcal{B}_1)}$.
2. Die Voraussetzungen sind erfüllt für eine stark stetige submarkoffsche Resolvente auf $\mathcal{C}_0$, und zwar mit $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1 = \mathcal{C}_0$: (R_1) ist klar, ebenso (R_2) nach Bemerkung 1 und (R_3) ist wegen $V_\lambda(\mathcal{C}_0^+) \subset \mathcal{C}_0^+$ und $0 \in \mathcal{F}_\lambda$ trivial.

Sei nun (P_t) die stark stetige submarkoffsche Halbgruppe auf $\mathcal{B}_0 = \overline{V_\lambda(\mathcal{B}_1)}$ mit

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f \, dt$$

für alle $f \in \mathcal{B}_0$ und $\lambda > 0$. Für die eindeutige Fortsetzbarkeit zu Kernen auf $(E, \mathcal{E})$ ist wichtig

Satz 3: $\mathcal{K}$ ist enthalten in $\mathcal{B}_0$.

Beweis: Sei $s \in \mathcal{F}^*$. Dann gibt es also ein $t \in \mathcal{F}$ mit $r = s + t \in \overline{V_\lambda(\mathcal{A})}$. Es sind $s, t \in \mathcal{F}_\mu$ für ein $\mu > 0$. Daher ist für alle $\lambda > 0$

$$0 \leqq s - \lambda V_{\lambda+\mu} s \quad \text{und} \quad 0 \leqq t - \lambda V_{\lambda+\mu} t,$$

also

$$0 \leqq s - \lambda V_{\lambda+\mu} s \leqq r - \lambda V_{\lambda+\mu} r.$$

Nach Lemma 2 ist $\lim_{\lambda\to\infty} \| r - \lambda V_{\lambda+\mu} r \| = 0$, also ist auch $\lim_{\lambda\to\infty} \| s - \lambda V_{\lambda+\mu} s \| = 0$. Wegen $s \in \mathcal{B}_1$ ist aber $\lambda V_{\lambda+\mu} s \in \mathcal{B}_0$ für alle $\lambda > 0$ und daher auch $s \in \mathcal{B}_0$.
Es ist also $\mathcal{F}^*$ in $\mathcal{B}_0$ enthalten und damit nach (R_2)

$$\mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{F}^* - \mathcal{F}^*} \subset \mathcal{B}_0.$$

Es existieren daher eindeutig bestimmte Kerne $\overline{P}_t$ auf $(E, \mathfrak{B})$ mit

$$\overline{P}_t f = P_t f$$

für alle $f \in \mathfrak{X}$. Da die Operatoren P_t submarkoffsch sind, sind es auch die Kerne $\overline{P}_t$. Insbesondere ist daher $\overline{P}_t f = P_t f$ sogar für alle $f \in \mathcal{C}_0$.

Wenn $\mathcal{B}_0$ echt größer ist als $\mathcal{C}_0$, so ist noch nicht ohne weiteres klar, daß die Kerne $\overline{P}_t$ eine Halbgruppe bilden (d.h. daß stets $\overline{P}_s \overline{P}_t = \overline{P}_{s+t}$ ist). Denn für $s,t \geq 0$ und $f \in \mathcal{C}_0$ gilt zwar

$$P_s \overline{P}_t f - P_s P_t f = P_{s+t} f = \overline{P}_{s+t} f,$$

aber da $\overline{P}_t f$ nur in $\mathcal{B}_0$ und nicht unbedingt in $\mathcal{C}_0$ liegt, wissen wir noch nicht, ob $P_s \overline{P}_t f = \overline{P}_s \overline{P}_t f$ ist. Diese Schwierigkeit wird aber sofort behoben durch den folgenden

Satz 4: Es ist $\overline{P}_t f = P_t f$ für alle $f \in \mathcal{B}_0$ und $t \geq 0$.

Beweis: Sei $h \in \mathcal{B}_0^+$, also insbesondere $h \in \mathcal{Y}_b^+$. Dann existieren $h_n \in \mathfrak{X}^+$ mit $h_n \uparrow h$, so daß also gilt

$$(*) \qquad \overline{P}_t h = \sup \overline{P}_t h_n = \sup P_t h_n \leq P_t h.$$

Sei $\lambda > 0$, wie es nach (R_3) existiert, $f \in \mathcal{B}_1^+$ und $s \in \mathcal{Y}_\lambda$ mit $V_\lambda f - s \in \mathcal{C}_0^+$. Wegen $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{B}_0$ ist dann

$$s = V_\lambda f - (V_\lambda f - s) \in \mathcal{B}_0.$$

Für $t \geq 0$ ist daher nach Lemma 4

$$e^{-\lambda t} P_t s \leq s.$$

Daher ist

$$\overline{P}_t V_\lambda f \geq \overline{P}_t (V_\lambda f - s) = P_t (V_\lambda f - s)$$

$$= P_t V_\lambda f - P_t s \geq P_t V f - e^{\lambda t} s.$$

Nach (R_3) ist also

$$\overline{P}_t V_\lambda f \geq P_t V_\lambda f.$$

Nach $(*)$ ist $\overline{P}_t V_\lambda f \leq P_t V_\lambda f$ und daher

$$\overline{P}_t V_\lambda f = P_t V_\lambda f.$$

Es ist also $\overline{P}_t = P_t$ auf $V_\lambda(\mathcal{B}_1^+)$, also auf $V_\lambda(\mathcal{B}_1^+) - V_\lambda(\mathcal{B}_1^+)$ $= V_\lambda(\mathcal{B}_1)$ und daher auch auf $\overline{V_\lambda(\mathcal{B}_1)} = \mathcal{B}_0$.

Jeder Kern $\overline{P}_t$ läßt sich also als Fortsetzung des Operators P_t auffassen, so daß wir im folgenden den Querstrich weglassen wollen.

Korollar: Für alle $s,t \geq 0$ ist $P_s P_t = P_{s+t}$.

Beweis: Es ist $P_s P_t = P_{s+t}$ auf $\mathcal{K}$.

Für alle $f \in \mathcal{B}_0$ gilt $P_t f \in \mathcal{B}_0 \subset \mathcal{C}_b$ und $\lim_{s \to t} \|P_s f - P_t f\| = 0$ für alle $t \geq 0$. Daher ist die Abbildung

$$(t,x) \longrightarrow P_t f\,(x)$$

stetig für alle $f \in \mathcal{B}_0$, also insbesondere für alle $f \in \mathcal{K}$. Die Abbildung $(t,x) \longrightarrow P_t f(x)$ ist daher meßbar für alle $f \in \mathcal{B}^+$. Es kann also $\int e^{-\lambda t} P_t f \, dt$ (punktweise) für alle $f \in \mathcal{B}^+$ gebildet werden und ergibt eine Funktion $W_\lambda f$ aus $\mathcal{B}^+$. (W_λ) ist die Resolvente auf $(E, \mathcal{B})$ zur Halbgruppe (P_t). Auf $\mathcal{B}_0$ stimmt sie mit (V_λ) überein.

Lemma 5: Jede nach unten halbstetige, bezüglich (W_λ) μ-supermediane Funktion ist μ-exzessiv bezüglich (W_λ) und auch bezüglich (P_t).

Beweis: s.[6],S.45 und [14],S.243,T65.
(Für die Definition der Begriffe μ-supermedian und μ-exzessiv sei auf [14],S.232,235 verwiesen.)

Satz 5: Es gibt ein $\lambda > 0$ und zwei stetige, bezüglich (P_t) λ-exzessive Funktionen p und q mit

a. p ist beschränkt und streng positiv,

b. q ist endlich,

c. für alle $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$ ist $[p \geq \alpha] \cap [q \leq \beta]$ kompakt.

Beweis: Sei $\lambda > 0$, wie es nach (R_3) existiert. Sei f aus $\mathcal{C}_0^+$ und streng positiv. Wegen $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{B}_0 = \overline{V_\lambda(\mathcal{B}_1)}$ ist V_λ streng positiv, also $p = V_\lambda f = W_\lambda f$ streng positiv. Außerdem ist p stetig, beschränkt und λ-exzessiv. Weiter ist nach (R_3) das Infimum aller Funktionen aus

$$\mathcal{S}_\lambda(p) = \{s \in \mathcal{S}_\lambda : p - s \in \mathcal{C}_0^+\}$$

gleich Null.

Wegen $p \in \mathcal{B}_o$ und $\mathcal{Y}_o \subset \mathcal{B}_o$ ist $\mathcal{Y}_\lambda(p)$ in $\mathcal{B}_o$ enthalten. Weil V_λ und W_λ auf $\mathcal{B}_o$ übereinstimmen, ist daher jede Funktion aus $\mathcal{Y}_\lambda(p)$ λ-supermedian bezüglich (W_μ), also λ-exzessiv nach Lemma 5. Außerdem ist $\mathcal{Y}_\lambda(p)$ offenbar inf-stabil.

Sei nun (K_n) eine Folge kompakter Teilmengen von E mit $K_n \subset K_{n+1}$ und $E = \bigcup K_n$. Dann gibt es $s_n \in \mathcal{Y}_\lambda(p)$ mit $s_n \leq 2^{-n}$ auf K_n. $q = \sum s_n$ ist dann stetig, endlich und λ-exzessiv.
Sei $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$. Wir wählen ein $M \in \mathbb{N}$, so daß $M\alpha > \beta + 1$ ist, und setzen

$$f_M = \sum_{n=1}^{M} (p - s_n).$$

Dann ist

$$q \geq \sum_{n=1}^{M} s_n = M\,p - f_M,$$

also

$$[\beta \geq q] \cap [p \geq \alpha] \subset [\beta \geq M\alpha - f_M] \subset [f_M \geq 1].$$

Wegen $f_M \in \mathcal{Y}_o^+$ ist $[f_M \geq 1]$ kompakt, also $[p \geq \alpha] \cap [q \leq \beta]$ relativ-kompakt und damit kompakt, weil p und q stetig sind.

Insgesamt erhalten wir das

Theorem: Es existiert eine Halbgruppe (P_t) submarkoffscher Kerne auf $(E, \mathcal{B})$ mit den Eigenschaften:

1. $P_t(\mathcal{B}_o) \subset \mathcal{B}_o$, insbesondere $P_t(\mathcal{K}) \subset \mathcal{Y}_b$.
2. $\lim_{t \to 0} \|P_t f - f\| = 0$ für alle $f \in \mathcal{B}_o$, insbesondere für alle $f \in \mathcal{Y}_o$.
3. $V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f \, dt$ für alle $\lambda > 0$ und $f \in \mathcal{B}_o$, insbesondere für alle $f \in \mathcal{Y}_o$.
4. Es gibt ein $\lambda > 0$ und zwei stetige, λ-exzessive Funktionen p und q mit
   a. p ist beschränkt und streng positiv,
   b. q ist endlich,
   c. für alle $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$ ist $[p \geq \alpha] \cap [q \leq \beta]$ kompakt.

Diese Halbgruppe submarkoffscher Kerne ist durch (2) und (3) eindeutig bestimmt.

Dabei ist bereits alles gezeigt bis auf die Eindeutigkeit, und die folgt aus der Eindeutigkeit der Laplace-Transformierten.

§ 3. Beschränkter Kern und Halbgruppe

Es seien $E, \mathfrak{E}, \mathcal{B}$ usw. wie im vorigen Paragraphen. V sei ein beschränkter Kern auf $(E, \mathfrak{E})$, der dem vollständigen Maximumprinzip genügt, und $\mathcal{B}_1$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{B}_b$, der mit f auch $|f|$ enthält. Es gelte

(K_1) $\quad V(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{C}$

(K_2) $\quad \mathcal{K} \subset \overline{\mathfrak{D}^* - \mathfrak{D}^*}$

(K_3) $\quad$ Für alle $f \in \mathcal{B}_1^+$ ist

$$\inf \left\{ d \in \mathfrak{D} : Vf - d \in \mathcal{C}_0^+ \right\} = 0.$$

Dabei sei $\mathfrak{D}$ die Menge aller bezüglich V dominanten Funktionen und $\mathfrak{D}^*$ die Menge aller $d \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{B}_1$, für die es ein $e \in \mathfrak{D}$ gibt mit $d + e \in \overline{V(\mathcal{B}_b)}$.

Bemerkungen:

1. Die Voraussetzungen sind erfüllt für einen beschränkten Kern V auf $(E, \mathfrak{E})$ mit $V(\mathcal{K})$ dicht in $\mathcal{C}_0$, der dem vollständigen Maximumprinzip genügt, und zwar für $\mathcal{B}_1 = \mathcal{C}_0$: Es ist $\overline{V(\mathcal{K})} = \overline{V(\mathcal{C}_0)} = \mathcal{C}_0$, also gilt (K_1). Weiter ist offenbar $V(\mathcal{K}^+) \subset \mathfrak{D}^*$, also $\mathcal{K} \subset \overline{V(\mathcal{K})} = \overline{V(\mathcal{K}^+) - V(\mathcal{K}^+)} \subset \overline{\mathfrak{D}^* - \mathfrak{D}^*}$, also (K_2) erfüllt. (K_3) ist trivial wegen $0 \in \mathfrak{D}$ und $V(\mathcal{C}_0^+) \subset \mathcal{C}_0^+$.
2. Für die axiomatische Potentialtheorie nach H.Bauer werden wir in Kapitel III einen Kern konstruieren, der den Voraussetzungen mit $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_b$ genügt.
3. Sei V irgendein Kern auf $(E, \mathfrak{E})$, der $\mathcal{K}$ in $\mathcal{C}$ abbildet (was aus (K_1) folgt, wenn $\mathcal{K}$ in $\mathcal{B}_1$ enthalten ist - und das muß der Fall sein nach Satz 3) und streng positiv ist (was aus (K_2) folgt). Dann ist eine nach unten halbstetige Funktion d aus $\mathcal{B}^+$ bereits dann dominant, wenn für alle

f,g aus $\mathcal{K}^+$ (statt $\mathcal{B}^+$) aus $d + Vf \geq Vg$ auf $[g > 0]$ folgt, daß $d + Vf \geq Vg$ ist (s. Beweis von T4 auf S.251 in [14]). Insbesondere genügt V dem vollständigen Maximumprinzip, wenn für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $f,g \in \mathcal{K}^+$ aus $a + Vf \geq Vg$ auf $[g > 0]$ folgt, daß $a + Vf \geq Vg$ ist.

Satz 6: Es gibt genau eine submarkoffsche Resolvente (V_λ) auf $(E, \mathcal{B})$ mit $V_0 = V$, und für diese gilt (R_1), (R_2) und (R_3) (mit $\mathcal{A} = \mathcal{B}_b$).

Beweis: Nach Satz 1 gibt es genau eine submarkoffsche Resolvente (V_λ) auf $(E, \mathcal{B})$ mit $V_0 = V$. Wegen $V(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_1$ ist dann $V_\lambda(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_1$ für alle $\lambda \geq 0$. Aus der Resolventengleichung folgt daher $V_\lambda(\mathcal{B}_1) = V(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{C}$ für alle $\lambda \geq 0$, also (R_1).
Weiter gilt $\mathcal{D}_b \subset \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ (s.[14],S.246,T70). Wegen $V_\lambda(\mathcal{B}_b) = V(\mathcal{B}_b)$ ist dann auch $\mathcal{D}^*$ in $\mathcal{S}^*$ enthalten. (R_2) folgt daher aus (K_2).
Entsprechend folgt (R_3) aus (K_3): Sei $f \in \mathcal{B}_1^+$ und $d \in \mathcal{D}$ mit $Vf - d \in \mathcal{C}_0^+$. Wegen $Vf \in \mathcal{C}_b$ ist auch $d \in \mathcal{C}_b$. Also ist für beliebiges $\lambda > 0$

$$s = \inf (V_\lambda f, d) \quad \in \quad \mathcal{S}_\lambda \cap \mathcal{C},$$

$V_\lambda f - s \in \mathcal{C}^+$ und $V_\lambda f - s \leq Vf - d$. Daher ist auch $V_\lambda f - s$ in $\mathcal{C}_0^+$. Wegen $s \leq d$ folgt also (R_3).

Korollar 1: Es existiert eine Halbgruppe (P_t) submarkoffscher Kerne auf $(E, \mathcal{B})$ mit den Eigenschaften:

1. $P_t(\mathcal{B}_0) \subset \mathcal{B}_0$, insbesondere $P_t(\mathcal{K}) \subset \mathcal{C}_b$.
2. $\lim_{t \to 0} \| P_t f - f \| = 0$ für alle $f \in \mathcal{B}_0$, insbesondere für alle $f \in \mathcal{C}_0$.
3. $Vf = \int_0^\infty P_t f \, dt$ für alle $f \in \mathcal{B}^+$.
4. Es gibt zwei stetige exzessive Funktionen p und q mit
   a. p ist beschränkt und streng positiv,
   b. q ist endlich,
   c. für alle $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$ ist $[p \geq \alpha] \cap [q \leq \beta]$ kompakt.

Diese Halbgruppe submarkoffscher Kerne ist durch (2) und (3) eindeutig bestimmt.

Beweis: Bis auf (4) und die Eindeutigkeit folgt alles aus Satz 6 und dem Theorem des vorigen Paragraphen. Wegen (K_3) ergibt sich aber (4) genauso wie Satz 5, und die Eindeutigkeit folgt wie beim Satz von Hunt (s.[14],S.265).

Bemerkung: Aus der Bemerkung 1 auf S.10 ergibt sich, daß der Satz von Hunt für den Fall eines beschränkten Kernes in diesem Korollar enthalten ist (s.[14],S.264,T15).

Korollar 2: Sei $\mathcal{E}_p$ die Menge aller exzessiven und $\mathcal{C}_u$ die Menge aller nach unten halbstetigen numerischen Funktionen auf E. Dann gilt:

1. Es ist $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}_u \subset \mathcal{E}_p \subset \mathcal{B}$.
2. Ist $V(\mathcal{B}_b^+) \subset \mathcal{C}_u$, so ist $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}_u = \mathcal{E}_p$ und $\mathcal{S} = \mathcal{E}_p = \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}_u$ für jedes nach oben σ-abgeschlossene $\mathcal{S}$ mit $V(\mathcal{B}_b^+) \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}_u$.

Beweis: Lemma 5, [14],T70 auf S.246 und T64 auf S.242.

Für die Existenz eines zur Halbgruppe (P_t) gehörigen Markoffprozesses mit s t e t i g e n Pfaden ist noch nützlich die folgende Eigenschaft des Kernes V:

(K_4) Zu jeder kompakten Teilmenge K von E und jeder Umgebung U von K existieren u,v aus $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$ und ein $h \in \mathcal{K}^+$ mit: $u \in v$, $u < v$ auf K, $u = v$ in $\complement U$, $h = 0$ in $\complement U$, $Vh - u \in \mathcal{B}$.

Damit erhalten wir nämlich den

Satz 7: Der Kern V erfülle noch (K_4). Es sei K eine kompakte Teilmenge von E und U eine Umgebung von K. Für jedes $f \in \mathcal{B}_b$ mit Träger in K strebt dann $\frac{1}{t} P_t f$ für t gegen Null in $\complement U$ gleichmäßig gegen Null.

Beweis (vgl. einen entsprechenden Beweis in [5]):
Seien $u,v \in \mathfrak{B}_\wedge\mathcal{C}$ und $h \in \mathcal{K}^+$ gemäß (K_4) gewählt. Wegen $Vh - u \in \mathfrak{B}_\wedge\mathcal{C}$ ist dann nach Lemma 5 für jedes $t \geq 0$

$$P_t(Vh - u) \leqslant Vh - u,$$

also

$$0 \leqslant u - P_t u \leqslant Vh - P_t Vh = \int_0^t P_s h \, ds.$$

Wegen $\lim_{s \to 0} \|P_s h - h\| = 0$ strebt $\frac{1}{t} \int_0^t P_s h \, ds$ für t gegen Null gleichmäßig gegen h, also gegen Null in $\mathfrak{C}U$. Daher strebt auch $\frac{1}{t}(u - P_t u)$ für t gegen Null gleichmäßig gegen Null in $\mathfrak{C}U$. Nun ist aber in $\mathfrak{C}U$

$$0 \leqslant \tfrac{1}{t} P_t(v - u) = \tfrac{1}{t}(P_t v - P_t u + u - v) \leqslant \tfrac{1}{t}(u - P_t u),$$

so daß also in $\mathfrak{C}U$ für t gegen Null $\frac{1}{t} P_t(v - u)$ gleichmäßig gegen Null strebt.
Sei nun $f \in \mathcal{B}_b$ mit $f = 0$ in $\mathfrak{C}K$. Da $v - u$ stetig und auf K streng positiv ist, gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$ mit $\|f\| \leqslant \alpha(v - u)$ auf K, so daß also $|f| \leqslant \alpha(v - u)$ ist. Dann ist aber

$$\left| \tfrac{1}{t} P_t f \right| \leqslant \tfrac{1}{t} P_t |f| \leqslant \alpha \tfrac{1}{t} P_t(v - u).$$

Also strebt für t gegen Null auch $\frac{1}{t} P_t f$ gleichmäßig gegen Null auf $\mathfrak{C}U$.

§ 4. Kern und Halbgruppe

Es sei V ein Kern auf einem Meßraum $(E, \mathcal{E})$, der dem vollständigen Maximumprinzip genügt. $\mathcal{A}_1$ sei ein Teilraum von $\mathcal{E}_b$, der mit f auch $|f|$ enthält, und es gelte

$$V(\mathcal{A}_1) \subset \overline{\mathcal{A}_1}.$$

Außerdem existiere eine isotone Folge (a_n) von Funktionen aus $\mathcal{E}_b^+$ mit beschränkten Va_n und so, daß für alle $f \in \mathcal{A}_1$ die Funktionen $a_n f$ in $\mathcal{A}_1$ liegen und für schließlich alle n gleich f sind. Dann gilt der

Satz 8: Es existiert eine submarkoffsche Resolvente (V_λ) auf $\mathcal{B}_1 = \overline{\mathcal{A}_1}$ mit $\overline{V_\lambda(\mathcal{B}_1)} = \overline{V(\mathcal{A}_1)}$ und

$$Vf = \sup_{\lambda > 0} V_\lambda f \qquad \text{für alle } f \in \mathcal{A}_1^+.$$

Beweis: Durch

$$V^n f = V(a_n f) \qquad (f \in \mathcal{E}_b)$$

definieren wir eine Folge beschränkter Kerne auf $(E, \mathcal{E})$, die ebenfalls dem vollständigen Maximumprinzip genügen. Nach Satz 1 existiert daher eine Folge submarkoffscher Resolventen (V_λ^n) auf $(E,\mathcal{E})$ mit $V_o^n = V^n$. Wegen $a_n \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_1$ ist $V^n(\mathcal{A}_1)$ in $\mathcal{B}_1$ enthalten, also auch $V^n(\mathcal{B}_1)$. Nach Satz 1 ist daher $V_\lambda^n(\mathcal{B}_1)$ in $\mathcal{B}_1$ enthalten.
Für jedes $f \in \mathcal{A}_1$ bezeichne $n(f)$ die kleinste natürliche Zahl n_o mit $a_n f = f$ für alle $n \geq n_o$.
Sei $\lambda > 0$, $f \in \mathcal{A}_1^+$ und $k_n = V_\lambda^n f$. Aus der Resolventengleichung folgt für $n \geq n(f)$

$$k_n = V(f - \lambda a_n k_n),$$

also für $m > n \geq n(f)$

$$k_m - k_n = V(\lambda a_n k_n - \lambda a_m k_m).$$

Es ist dann $0 \geq V(\lambda a_n k_n - \lambda a_m k_m)$ auf $[0 > k_m - k_n]$, also auf $[a_n k_n - a_m k_m > 0]$. Daher ist $0 \geq V(\lambda a_n k_n - \lambda a_m k_m)$ auf E, d.h. $0 \geq k_m - k_n$.
Für $n \geq n(f)$ ist daher $(V_\lambda^n f)$ antiton in n, es existiert also

$$V_\lambda f = \lim_{n\to\infty} V_\lambda^n f.$$

Dieser Limes existiert damit für alle $f \in \mathcal{A}_1^+ - \mathcal{A}_1^+ = \mathcal{A}_1$, also wegen $\|\lambda V_\lambda^n\| \leq 1$ für alle $f \in \overline{\mathcal{A}}_1 = \mathcal{B}_1$. Offenbar ist $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$.
Sei $g \in \mathcal{A}_1^+$. Dann ist $Vg \in \mathcal{B}_1^+$, also

$$V_\lambda Vg = \lim_{n\to\infty} V_\lambda^n Vg.$$

Nun ist aber für $n \geq n(g)$

$$(1) \qquad \lambda V_\lambda^n Vg = Vg - V_\lambda^n g,$$

also $(\lambda V_\lambda^n Vg)$ isoton in n und

$$(2) \qquad \lambda V_\lambda Vg = Vg - V_\lambda g.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $Vg \in \mathcal{B}_1 = \overline{\mathcal{A}}_1$ existiert ein $f \in \mathcal{A}_1$ mit $\| Vg - f \| \leq \varepsilon$. Dann ist aber auch $\|Vg - |f|\| \leq \varepsilon$, so daß wir $f \geq 0$ wählen können. Wegen $\|\lambda V_\lambda^n\| \leq 1$ und $\|\lambda V_\lambda\| \leq 1$ folgt $\| \lambda V_\lambda^n Vg - \lambda V_\lambda^n f \| \leq \varepsilon$ und $\|\lambda V_\lambda Vg - \lambda V_\lambda f\| \leq \varepsilon$. Für alle $n \geq n(f)$, $n(g)$ ist daher

$$\lambda V_\lambda Vg - \varepsilon \leq \lambda V_\lambda f \leq \lambda V_\lambda^n f \leq \lambda V_\lambda^n Vg + \varepsilon \leq \lambda V_\lambda Vg + \varepsilon,$$

also

$$\| \lambda V_\lambda Vg - \lambda V_\lambda^n Vg \| \leq 2\varepsilon.$$

Wegen (1) und (2) folgt daraus

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \| V_\lambda^n g - V_\lambda g \| = 0.$$

Das gilt für alle $g \in \mathcal{A}_1^+$, also für alle $g \in \mathcal{A}_1$, also für alle $g \in \mathcal{B}_1$.
Wegen $V_\lambda^n(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_1$ ist daher auch $V_\lambda(\mathcal{B}_1) \subset \mathcal{B}_1$. Es gilt aber sogar $\overline{V_\lambda(\mathcal{B}_1)} = \overline{V(\mathcal{A}_1)}$: Wegen

$$V_\lambda^n(\mathcal{B}_1) = V^n(\mathcal{B}_1) = V^n(\overline{\mathcal{A}_1}) \subset \overline{V^n(\mathcal{A}_1)} \subset \overline{V(\mathcal{A}_1)}$$

ist $V_\lambda(\mathcal{B}_1)$ in $\overline{V(\mathcal{A}_1)}$ enthalten. Andererseits ist nach (2) $V(\mathcal{A}_1)$ in $V_\lambda(\mathcal{B}_1)$ enthalten.
Weiter folgt aus (3) und der Resolventengleichung für die V_λ^n, daß

$$(\mu - \lambda)\, V_\mu V_\lambda f = V_\lambda f - V_\mu f$$

ist für alle $\mu, \lambda > 0$ und $f \in \mathcal{B}_1$.
Wir zeigen noch $V = \sup V_\lambda$ auf $\mathcal{A}_1^+$: Sei $g \in \mathcal{A}_1^+$. Dann ist für alle n

$$0 \leq V_\lambda^n g \leq V^n g \leq Vg,$$

also

$$0 \leq V_\lambda g \leq Vg.$$

Daraus folgt $\lim_{\lambda \to 0} \| \lambda V_\lambda g \| = 0$. Wegen $\| \lambda V_\lambda \| \leq 1$ gilt das auch für alle $f \in \mathcal{B}_1$. Wegen $Vg \in \mathcal{B}_1$ folgt daher aus (2)

$$\lim_{\lambda \to 0} \| Vg - V_\lambda g \| = 0.$$

Lemma 6: Sei E lokal-kompakt mit abzählbarer Basis und V ein Kern auf $(E, \mathcal{B})$ mit $V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}_b$. Dann gibt es eine isotone Folge (a_n) von Funktionen aus $\mathcal{C}_0^+$ mit beschränkten Va_n und so, daß die a_n auf jeder kompakten Menge schließlich gleich 1 sind.

Beweis: Sei (K_n) eine Folge kompakter Teilmengen von E mit $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ und $\bigcup K_n = E$. (f_n) sei eine isotone Folge aus $\mathcal{K}^+$ mit $f_n = 1$ auf K_n.
Da Vf_n beschränkt ist, existieren $\alpha_n > 0$ mit $\sum \alpha_n < +\infty$ und $\sum \alpha_n \| Vf_n \| < +\infty$. Wir setzen

$$f = \sum \alpha_n f_n .$$

Dann ist f aus $\mathcal{C}_o^+$, streng positiv und $Vf \in \mathcal{B}_b$. Weiter definieren wir

$$a_n = \inf (nf, 1) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Die Folge (a_n) ist isoton, es ist $a_n \in \mathcal{C}_o^+$, $Va_n \in \mathcal{B}_b$ und $[a_n = 1] \subset [a_{n+1} = 1]$ für alle n und $\bigcup [a_n = 1] = E$.

Bemerkung: Wenn $V(\mathcal{K})$ in $\mathcal{C}_b$ (bzw. $\mathcal{C}_o$) enthalten ist, liegen alle Va_n in $\mathcal{C}_b$ (bzw. $\mathcal{C}_o$).

Korollar: Sei E lokal-kompakt mit abzählbarer Basis und V ein Kern auf $(E, \mathcal{B})$, der $\mathcal{K}$ in $\mathcal{C}_o$ abbildet und dem vollständigen Maximumprinzip genügt. Dann existiert eine submarkoffsche Resolvente (V_λ) auf $\mathcal{C}_o$ mit $V = \sup V_\lambda$.

Beweis: Nach Lemma 6 sind die Voraussetzungen von Satz 8 mit $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}_1 = \mathcal{K}$ erfüllt. Aus $V = \sup V_\lambda$ auf $\mathcal{K}^+$ folgt sofort $V = \sup V_\lambda$ auf $\mathcal{C}_o^+$.

Wir wollen jetzt spezieller voraussetzen:

E sei lokal-kompakt mit abzählbarer Basis und V ein Kern auf $(E, \mathcal{B})$, der dem vollständigen Maximumprinzip genügt. $\mathcal{A}_1$ sei ein Teilraum von $\mathcal{B}_b$, der $\mathcal{K}$ und mit f auch $|f|$ enthält. Es sei wieder $\mathcal{B}_1 = \overline{\mathcal{A}_1}$ und es gebe $a_n \in \mathcal{B}_b^+$ wie bisher. Außerdem gelte

(K_1') $\quad V(\mathcal{A}_1) \subset \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{C}$

(K_2') $\quad \mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{D}^* - \mathcal{D}^*}$

(K_3') $\quad$ Für alle $f \in \mathcal{A}_1^+$ ist

$$\inf \{ d \in \mathcal{D} : Vf - d \in \mathcal{C}_o^+ \} = 0.$$

Dabei sei $\mathcal{D}$ wieder die Menge aller bezüglich V dominanten Funktionen und $\mathcal{D}^*$ die Menge aller $d \in \mathcal{D} \cap \mathcal{B}_1$, zu denen es

ein $e \in \mathfrak{D}$ gibt mit $e + d \in \overline{V(\mathcal{A}_1)}$.

Bemerkungen:
1. Die Situation des vorigen Paragraphen ist hierin mit $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1$ und $a_n = 1$ für alle n fast enthalten. (Bei der Definition von $\mathfrak{D}^*$ tritt $V(\mathcal{A}_1)$ auf statt $V(\mathcal{B}_b)$.)
2. Die Voraussetzungen sind erfüllt für einen Kern V auf $(E, \mathcal{E})$ mit $V(\mathcal{K})$ dicht in $\mathcal{C}_0$, der dem vollständigen Maximumprinzip genügt, und zwar mit $\mathcal{A}_1 = \mathcal{K}$. (Vergl. Lemma 6 und Bemerkung 1 auf S.10.)

Nach Satz 8 existiert eine submarkoffsche Resolvente (V_λ) auf $\mathcal{B}_1$ mit $\overline{V_\lambda(\mathcal{B}_1)} = \overline{V(\mathcal{A}_1)}$ und $Vf = \sup V_\lambda f$ für alle $f \in \mathcal{A}_1^+$.

Satz 9: Die submarkoffsche Resolvente (V_λ) auf $\mathcal{B}_1$ genügt den Bedingungen (R_1), (R_2) und (R_3) mit $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1$.

Beweis: Es ist noch (R_2) und (R_3) zu zeigen.
Sei $d \in \mathfrak{D} \cap \mathcal{B}_1$. Dann ist d dominant bezüglich aller V^n. Es gilt daher $\lambda V_\lambda^n d \leq d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$. Daraus folgt $\lambda V_\lambda d \leq d$ für alle $\lambda > 0$, also $d \in \mathcal{S}_c$. Es ist also

$$\mathfrak{D} \cap \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{S}_0.$$

Sei $e \in \mathfrak{D}$ mit $d + e \in \overline{V(\mathcal{A}_1)} = \overline{V_\lambda(\mathcal{B}_1)} \subset \mathcal{B}_1$. Dann ist auch $e \in \mathcal{B}_1$, also $e \in \mathcal{S}_0$. Daher ist $\mathfrak{D}^*$ in $\mathcal{S}^*$ enthalten, aus (K_2') folgt also (R_2).
Weiter sei $f \in \mathcal{A}_1^+$ und $d \in \mathfrak{D}$ mit $Vf - d \in \mathcal{C}_0^+$. Wegen $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{B}_1$ ist daher $d \in \mathcal{B}_1$, also $d \in \mathcal{S}_0$. Wie beim Beweis von Satz 6 folgt aus (K_3') daher (R_3) für alle $f \in \mathcal{A}_1^+$ bei beliebigem $\lambda > 0$. Dann gilt es aber auch für alle $f \in \mathcal{B}_1^+$: Sei $f \in \mathcal{B}_1^+$ und $\lambda > 0$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $g \in \mathcal{A}_1^+$ mit $|f - g| \leq \varepsilon$. Sei $s \in \mathcal{S}_\lambda$ mit $V_\lambda g - s \in \mathcal{C}_0^+$. Dann ist

$$s' = \inf (s + V_\lambda(|f - g|), V_\lambda f) \in \mathcal{S}_\lambda,$$

$$V_\lambda f - s' \in \mathcal{C}_0^+ \quad \text{und} \quad s' \leq s + \frac{1}{\lambda}\varepsilon.$$

Nach Paragraph 2 existiert daher eine Halbgruppe (P_t) submarkoffscher Kerne auf $(E, \mathcal{E})$, die auf $\mathcal{B}_0 = \overline{V_\lambda(\mathcal{B}_1)}$

$= \overline{V(\mathcal{A}_1)}$ eine stark stetige Halbgruppe bilden mit den Restriktionen der V_λ als Resolvente.

Satz 10: Für alle $f \in \mathcal{B}^+$ gilt $Vf = \int_0^\infty P_t f \, dt$.

Beweis: Wegen $\mathcal{K}^+ \subset \mathcal{A}_1^+ \cap \mathcal{B}_0$ ist

$$V_\lambda f = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f \, dt$$

und $Vf = \sup V_\lambda f$ für alle $\lambda > 0$ und $f \in \mathcal{K}^+$. Für λ gegen Null folgt daraus

$$Vf = \int_0^\infty P_t f \, dt$$

für alle $f \in \mathcal{K}^+$. Weil V ein Kern ist mit $V(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}_b$, gilt das dann auch für alle $f \in \mathcal{B}^+$.

Satz 11: Es gibt zwei stetige exzessive Funktionen p und q mit

a. p ist beschränkt und streng positiv,
b. q ist endlich,
c. für alle $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$ ist $[p \geq \alpha] \cap [q \leq \beta]$ kompakt.

Beweis: Sei (K_n) eine Folge kompakter Teilmengen von E mit $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$ und $\bigcup K_n = E$. (f_n) sei eine isotone Folge aus $\mathcal{K}^+$ mit $f_n = 1$ auf K_n.
Für jedes $p_n = Vf_n$ existiert wegen

$$\inf \left\{ d \in \mathcal{D} : p_n - d \in \mathcal{P}_0^+ \right\} = 0$$

nach dem Verfahren im Beweis von Satz 5 eine stetige, endliche, exzessive Funktion q_n mit der Eigenschaft: Für alle $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$ ist

$$[p_n \geq \alpha] \cap [q_n \leq \beta]$$

kompakt.
Seien $\alpha_n > 0$ mit $\sum \alpha_n < +\infty$, $\sum \alpha_n \|p_n\| < +\infty$ und $\alpha_n q_n \leq 2^{-n}$ auf K_n. Wir setzen

$$p = \sum \alpha_n p_n, \quad q = \sum \alpha_n q_n.$$

p und q sind stetig, exzessiv und endlich, p sogar beschränkt. Weiter ist $p = Vf$ mit streng positivem $f = \sum \alpha_n f_n$ aus $\mathcal{P}_0^+$, also p streng positiv.

Sei $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$. Es gibt ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=m+1}^{\infty} \alpha_n \|p_n\| < \frac{\alpha}{2}$.
Dann ist

$$[p \geq \alpha] \subset [\sum_{n=1}^{m} \alpha_n p_n \geq \frac{\alpha}{2}],$$

also

$$[p \geq \alpha] \wedge [q \leq \beta] \subset \bigcup_{n=1}^{m} ([p_n \geq \frac{\alpha}{2m\alpha_n}] \wedge [q_n \leq \frac{\beta}{\alpha_n}]).$$

Es ist daher $[p \geq \alpha] \wedge [q \leq \beta]$ relativ-kompakt, also kompakt.

Resultat: Wir erhalten das gleiche Ergebnis wie im letzten
========= Paragraphen, nämlich Korollar 1 auf S.11.

Bemerkung:
Nach der Bemerkung 2 auf S.17 ist darin der Satz von Hunt als Spezialfall enthalten.

II. HALBGRUPPEN UND PROZESSE

In diesem Kapitel wollen wir durchgehend voraussetzen:

Es sei E ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Basis. Die Bedeutung von $\mathcal{E}, \mathcal{B}, \mathcal{K}$ usw. sei wie im ersten Kapitel. Im übrigen seien neu auftretende Begriffe - soweit nicht ausdrücklich anders erwähnt - verstanden im Sinne des Buches "Markov Processes and Potential Theory" von R.M.Blumenthal und R.K.Getoor.(s.[3]).
$(P_t)_{t>0}$ sei eine Halbgruppe submarkoffscher Kerne auf $(E, \mathcal{E})$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

(P_1) Für ein $\lambda \geq 0$ gibt es zwei λ-supermediane Funktionen p und q mit
a. p ist endlich und streng positiv,
b. q ist endlich,
c. für alle $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$ ist $[p \geq \alpha] \cap [q \leq \beta]$ relativ-kompakt.

(P_2) Für alle $f \in \mathcal{K}$ strebt $P_t f$ für t gegen Null lokal-gleichmäßig gegen f.

Wir wollen auch gleich drei weitere Eigenschaften einführen, die aber nur verwendet werden sollen, wenn wir sie ausdrücklich fordern:

(P_2') Für alle $f \in \mathcal{K}$ strebt $P_t f$ für t gegen Null gleichmäßig gegen f.

(P_3) Für alle $f \in \mathcal{K}$ und $t > 0$ ist $P_t f$ stetig.

(P_4) Für alle $f \in \mathcal{K}$ und Umgebungen U des Trägers von f strebt $\frac{1}{t} P_t f$ für t gegen Null in $\complement U$ gleichmäßig gegen Null.

Bemerkungen:

1. Bedingung (P_1) ist insbesondere erfüllt, wenn es für ein $\lambda \geq 0$ eine endliche, streng positive, im Unendlichen verschwindende λ-supermediane Funktion p gibt. (Man kann dann q = 0 wählen.)
(P_1) gilt daher insbesondere für eine Halbgruppe (P_t) von submarkoffschen Kernen, die $\mathcal{C}_0$ in sich abbilden und (P_2) erfüllen. Denn für ein beliebiges $\lambda > 0$ und streng positives $f \in \mathcal{C}_0^+$ ist dann $V_\lambda f = \int e^{-\lambda t} P_t f \, dt \in \mathcal{C}_0^+$, streng positiv und λ-supermedian (sogar λ-exzessiv).
2. Die Halbgruppen, die wir im ersten Kapitel konstruiert haben, haben die Eigenschaften (P_1), (P_2'), (P_3) und unter einer zusätzlichen Voraussetzung auch die Eigenschaft (P_4).
3. Jede Fellersche Halbgruppe (s.[14], S.263) hat nach Bemerkung 1 die Eigenschaften (P_1), (P_2') und (P_3).

Sei $E' = E \cup \{\Delta\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung von E, $\mathfrak{B}'$ das System der borelschen Teilmengen von E'. Mit $\mathcal{B}'$ wollen wir die Menge aller numerischen borelschen Funktionen auf E' bezeichnen und wie üblich die Funktionen aus $\mathcal{B}$ mit denjenigen Funktionen aus $\mathcal{B}'$ identifizieren, die in Δ Null sind.

Wir setzen $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ und ergänzen die Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ durch $P_0 = I$ und $P_\infty = 0$ zu einer Halbgruppe $(P_t)_{t \in \mathcal{T}}$. Bekanntlich läßt sich diese Halbgruppe durch

$$P_t' f = P_t(f - f(\Delta)) + f(\Delta) \qquad (f \in \mathcal{B}_b')$$

zu einer Halbgruppe $(P_t')_{t \in \mathcal{T}}$ markoffscher Kerne auf $(E', \mathfrak{B}')$ fortsetzen (mit $P_0' = I'$).

Nach dem Satz von Kolmogoroff existiert daher eine Familie

$$(\Omega, \mathfrak{M}, P^x, (X_t)_{t \in \mathcal{T}})_{x \in E'}$$

von stochastischen Prozessen auf $(E', \mathfrak{B}')$ (s.[14], S.79), deren endlich-dimensionale Verteilungen durch Startwahrscheinlichkeiten ε_x und Übergangsoperatoren P_t' gegeben sind:

$$(*) \qquad P^x\left[X_{t_1} \in B_1, \ \dots\ , X_{t_n} \in B_n\right]$$
$$= P'_{t_1}\left(I_{B_1} \cdot P'_{t_2-t_1}\left(I_{B_2} \cdot \dots\dots P_{t_n-t_{n-1}} I_{B_n}\right)\dots\right)(x)$$

für alle $x \in E'$, $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ und $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}'$. (Für $B \in \mathcal{B}'$ bedeute I_B die Indikatorfunktion von B.)

Sei nun $(\Omega, \mathfrak{M}, P^x, (X_t))_{x \in E'}$ irgendeine solche Familie von Prozessen. Wegen $(*)$ gilt dann die (schwache) Markoffeigenschaft

$$P^x\left[X_{t+s} \in B \mid \mathcal{F}_t\right] = P^{X_t}\left[X_s \in B\right]$$

für alle $x \in E'$, $s,t \in \mathcal{T}$ und $B \in \mathcal{B}'$. Dabei sei $\mathcal{F}_t$ die von allen $\left[X_r \in B\right]$ mit $r \leq t$ und $B \in \mathcal{B}$ erzeugte σ-Algebra auf Ω.

Insbesondere ist für jedes $x \in E'$ und für $s \leq t$

$$P^x\left[X_s = \Delta,\ X_t = \Delta\right] = \int_{[X_s = \Delta]} P^{X_s}\left[X_{t-s} = \Delta\right]\, dP^x$$
$$= \int_{[X_s = \Delta]} P'_{t-s} I_{\{\Delta\}}(X_s)\, dP^x = P^x\left[X_s = \Delta\right],$$

d.h. auf $\left[X_s = \Delta\right]$ ist $X_t = \Delta$ P^x-f.s. Pfade, die zu einem Zeitpunkt s in Δ sind, sind also zu einem späteren Zeitpunkt t wenigstens fast sicher in Δ.

Andererseits gerantiert die Eigenschaft (P_1), daß Pfade, die zu einer Zeit t nicht in Δ sind, bis zum Zeitpunkt t von Δ genügend weit entfernt bleiben (im Sinne des Korollars zu den beiden folgenden Lemmata):
Seien p und q zwei bezüglich $(P_t)_{t>0}$ λ-supermediane Funktionen, wie sie nach (P_1) existieren. Dann sind sie offenbar auch λ-supermedian bezüglich $(P'_t)_{t \in \mathcal{T}}$.
Q^+ sei die Menge der positiven rationalen Zahlen und für $a,b \in Q^+$ mit $a \leq b$ sei $Q(a,b) = \left\{r \in Q^+ : a \leq r \leq b\right\}$.
Dann gilt

Lemma 1: Für jedes $x \in E'$ und $t \in Q^+$ ist

$$P^x\left[\sup_{s \in Q(0,t)} q \circ X_s = +\infty\right] = 0.$$

Beweis: Sei $x \in E'$, $t \in Q^+$ und U eine endliche Teilmenge von $Q(0,t)$ mit $0 \in U$. Da q λ-supermedian und endlich ist,

folgt aus der Markoffeigenschaft unmittelbar, daß $(e^{-\lambda s}\ q\circ X_s)_{s\in U}$ ein Supermartingal ist. Daher ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$k\ P^x\Big[\sup_{s\in U} e^{-\lambda s}\ q\circ X_s > k\Big] \leqslant E^x(e^{-\lambda 0}\ q\circ X_0) = q(x)$$

(s.[14],S.114). Da das für jede endliche Teilmenge U von $Q(0,t)$ mit $0 \in U$ gilt, ist auch

$$k\ P^x\Big[\sup_{s\in Q(0,t)} e^{-\lambda s}\ q\circ X_s > k\Big] \leqslant q(x).$$

Weil $q(x)$ endlich ist und $e^{-\lambda s} \geqslant e^{-\lambda t} > 0$ für $s \in Q(0,t)$, folgt daraus die Behauptung für k gegen Unendlich.

Lemma 2: Für jedes $x \in E'$ und $t \in Q^+$ ist

$$P^x\Big[\inf_{s\in Q(0,t)} p\circ X_s = 0,\ p\circ X_t > 0\Big] = 0.$$

Beweis: Sei $x \in E'$, $t \in Q^+$, $\varepsilon,\eta > 0$ und U eine endliche Teilmenge von $Q(0,t)$. Für $\omega \in \Omega$ sei

$$T(\omega) = \inf\left\{s \in U:\ e^{-\lambda s}\ p\circ X_s < \varepsilon\right\}$$

(mit $\inf \emptyset = +\infty$). Für $s \in U$ ist $A_s = [T = s] \in \mathcal{F}_s$. Da auch $(e^{-\lambda s}\ p\circ X_s)$ ein Supermartingal ist, gilt daher

$$\begin{aligned}\eta\ P^x\Big(\Big[\inf_{s\in U} e^{-\lambda s}\ p\circ X_s < \varepsilon\Big] \cap \Big[e^{-\lambda t}\ p\circ X_t > \eta\Big]\Big)\\ \leqslant \sum_{s\in U} \int_{A_s} e^{-\lambda t}\ p\circ X_t\ dP^x \leqslant \sum_{s\in U} \int_{A_s} e^{-\lambda s}\ p\circ X_s\ dP^x\\ \leqslant \varepsilon \sum_{s\in U} P^x(A_s) \leqslant \varepsilon .\end{aligned}$$

Da das für jede endliche Teilmenge U von $Q(0,t)$ gilt, folgt daraus

$$\eta\ P^x\Big[\inf_{s\in Q(0,t)} e^{-\lambda s}\ p\circ X_s < \varepsilon\ ,\ e^{-\lambda t}\ p\circ X_t > \eta\Big] \leqslant \varepsilon.$$

Läßt man erst ε und dann η gegen Null streben, so ergibt sich daraus die Behauptung, wenn man noch $1 \geqslant e^{-\lambda s} \geqslant e^{-\lambda t}$ für $s \in Q(0,t)$ berücksichtigt.

Korollar: Für jedes $x \in E'$ und $t \in Q^+$ ist P^x-f.s. auf $[X_t \in E]$ jedes $W_t(\omega) = \left\{X_s(\omega):\ s \in Q(0,t)\right\}$ relativkompakt in E.

Beweis: Sei $x \in E'$ und $t \in Q^+$. Es ist $[X_t \in E] = [p \circ X_t > 0]$. Nach Lemma 1 und 2 existiert daher P^x-f.s. für $\omega \in [X_t \in E]$ ein $\alpha > 0$ und $\beta < +\infty$ mit

$$W_t(\omega) \subset [p \geq \alpha] \cap [q \leq \beta].$$

Die Behauptung folgt daher aus (P_1).

Bei Regularitätsfragen genügt es daher, das Verhalten der Pfade lokal in E zu studieren. Dem werden die Korollare zu Lemma 5 dienen. Zuvor aber eine Umformulierung der Eigenschaften (P_2) und (P_4):
Es sei ϱ eine mit der Topologie auf E' verträgliche Metrik, und es sei für $x \in E'$ und $\varepsilon > 0$

$$U_\varepsilon(x) = \{ y \in E' : \varrho(x,y) < \varepsilon \}.$$

Dann gilt

Lemma 3: Für alle kompakten Teilmengen K von E und alle $\varepsilon > 0$ ist

$$\lim_{t \to 0} \sup_{x \in K} P'_t(x, E' \setminus U_\varepsilon(x)) = 0.$$

Beweis: Sei K eine kompakte Teilmenge von E und $\varepsilon > 0$. Sei W eine Umgebung von K, so daß $\overline{W}$ eine kompakte Teilmenge von E ist. Sei $0 < 4\eta < \varepsilon$, so daß 4η kleiner ist als der Abstand von K und $\complement W$. Dann ist für jedes $x \in K$ die Menge $U_{4\eta}(x)$ enthalten in W, also relativ-kompakt in E. Seien nun $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $K \subset \bigcup U_\eta(x_i)$. Dann gibt es $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{K}^+$ mit $f_i \leq 1$, $f_i = 1$ auf $U_\eta(x_i)$ und $f_i = 0$ in $E' \setminus U_{2\eta}(x_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wegen (P_2) gibt es dann zu $\alpha > 0$ ein $\beta > 0$ mit

$$P_t f_i(x) \geq 1 - \alpha$$

für alle $t \leq \beta$, $i = 1, \ldots, n$ und $x \in U_\eta(x_i)$. Wegen $f_i \leq I_{U_{2\eta}(x_i)}$ folgt aus $P_t f_i(x) \geq 1 - \alpha$, daß $P_t(x, U_{2\eta}(x_i)) \geq 1 - \alpha$ ist. Weiter gibt es zu $x \in K$ ein i mit $x \in U_\eta(x_i)$ und dann ist $U_{2\eta}(x_i) \subset U_{4\eta}(x)$, also $P_t(x, U_{4\eta}(x)) \geq P_t(x, U_{2\eta}(x_i))$. Also ist

$$P'_t(x, U_{4\eta}(x)) = P_t(x, U_{4\eta}(x)) \geq 1 - \alpha$$

und daher erst recht $P'_t(x, U_\varepsilon(x)) \geq 1 - \alpha$ für alle $x \in K$

und $t < \beta$. Es ist also

$$\lim_{t \to o} \inf_{x \in K} P'_t(x, U_\varepsilon(x)) = 1$$

und daher

$$\lim_{t \to o} \sup_{x \in K} P'_t(x, E' \setminus U_\varepsilon(x)) = 0.$$

Lemma 4: Es gelte (P_4). Dann ist für alle kompakten Teilmengen K von E und alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \to o} \sup_{x \in K} \frac{1}{t} P'_t(x, K \setminus U_\varepsilon(x)) = 0.$$

Beweis: Sei K eine kompakte Teilmenge von E und $\varepsilon > 0$. Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $K \subset \bigcup U_\varepsilon(x_i)$ und $g_1, \ldots, g_n \in \mathcal{K}^+$ mit $g_i \leqslant 1$, $g_i = 0$ in $U_{2\varepsilon}(x_i)$, $g_i = 1$ in $K \setminus U_{3\varepsilon}(x_i)$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Wegen (P_4) gibt es dann zu $\alpha > 0$ ein $\beta > 0$ mit

$$\frac{1}{t} P_t g_i(x) \leqslant \alpha$$

für alle $0 < t < \beta$, $i = 1, \ldots, n$ und $x \in K \cap U_\varepsilon(x_i)$. Wegen $I_{K \setminus U_{3\varepsilon}(x_i)} \leqslant g_i$ folgt aus $\frac{1}{t} P_t g_i(x) \leqslant \alpha$, daß $\frac{1}{t} P_t(x, K \setminus U_{3\varepsilon}(x_i)) \leqslant \alpha$ ist.
Weiter gibt es zu $x \in K$ ein i mit $x \in U_\varepsilon(x_i)$ und dann ist $U_{3\varepsilon}(x_i) \subset U_{4\varepsilon}(x)$, also $P_t(x, K \setminus U_{4\varepsilon}(x)) \leqslant P_t(x, K \setminus U_{3\varepsilon}(x_i))$. Also ist

$$\frac{1}{t} P_t(x, K \setminus U_{4\varepsilon}(x)) \leqslant \alpha$$

für alle $x \in K$ und $0 < t < \beta$ und daher

$$\lim_{t \to o} \sup_{x \in K} \frac{1}{t} P'_t(x, K \setminus U_{4\varepsilon}(x)) = 0.$$

Seien $a, b \in Q^+$ mit $a \leqslant b$. Dann definieren wir für jede Teilmenge U von Q(a,b), für $B, C \in \mathcal{C}'$ und $\varepsilon > 0$

$$A_B(U, \varepsilon, C) = [X_a \in C] \cap [X_b \in B] \cap \bigcup_{s,t \in U} [X_s \in C, X_t \in C, \varrho(X_s, X_t) \geqslant \varepsilon],$$

$$A'_B(a, b; \varepsilon, C) = A_B(Q(a,b), \varepsilon, C)$$

und schließlich für $t \geq 0$

$$\alpha_B(t,\varepsilon,C) = \sup_{s \leq t} \sup_{x \in C} P_s(x, B \setminus U_\varepsilon(x)).$$

Dann gilt

Lemma 5: Für jedes $x \in E'$ und $A \in \mathfrak{F}_a$ ist

$$P^x(A \cap A_B(a,b;4\varepsilon,C)) \leq 2\,\alpha_B(b-a,\varepsilon,C)\, P^x(A).$$

Beweis: Sei U eine endliche Teilmenge von Q(a,b). Für $\omega \in \Omega$ sei

$$T(\omega) = \inf \{ t \in U: X_t \in C, \varrho(X_a, X_t) \geq 2\varepsilon \}$$

(mit inf $\emptyset = +\infty$). Dann ist $[T = s] \in \mathfrak{F}_s$ für alle $s \in U$. Wegen der Dreiecksungleichung ist

$$\bigcup_{s,t \in U} [X_s \in C,\ X_t \in C,\ \varrho(X_s,X_t) \geq 4\varepsilon]$$
$$\subset \bigcup_{s \in U} [X_s \in C, \varrho(X_a,X_s) \geq 2\varepsilon]$$
$$\subset [\varrho(X_a,X_b) \geq \varepsilon] \cup [([T \leq b] \cap [\varrho(X_T,X_b) \geq \varepsilon]).$$

Es ist also

$$(*) \qquad A_B(U,4\varepsilon,C) \subset [X_a \in C, X_b \in B, \varrho(X_a,X_b) \geq \varepsilon] \cup \bigcup_{s \in U} ([T=s] \cap [X_s \in C, X_b \in B, \varrho(X_s,X_b) \geq \varepsilon]).$$

Sei nun $A \in \mathfrak{F}_a$, $s \in Q(a,b)$ und $A_s \in \mathfrak{F}_s$. Dann ist wegen der schwachen Markoffeigenschaft für jedes $x \in E'$

$$P^x(A \cap A_s \cap [X_s \in C, X_b \in B, \varrho(X_s,X_b) \geq \varepsilon])$$
$$= \int_{A \cap A_s \cap [X_s \in C]} P^{X_s}[X_{b-s} \in B, \varrho(X_o, X_{b-s}) \geq \varepsilon]\, dP^x$$
$$\leq \alpha_B(b-a,\varepsilon,C)\, P^x(A \cap A_s).$$

Damit erhalten wir aus $(*)$

$$P^x(A \cap A_B(U,4\varepsilon,C))$$
$$\leq \alpha_B(b-a,\varepsilon,C) \cdot (P^x(A) + \sum_{s \in U} P^x(A \cap [T=s]))$$
$$\leq 2\alpha_B(b-a,\varepsilon,C) \cdot P^x(A).$$

Wenn U gegen Q(a,b) aufsteigt, dann steigt $A_B(U,4\varepsilon,C)$ auf gegen $A_B(a,b;4\varepsilon,C)$. Damit folgt die Behauptung des Lemmas.

Sei U eine Teilmenge von Q(a,b), $\varepsilon > 0$ und $C \in \mathfrak{B}'$. Dann setzen wir für $k \in \mathbb{N}$

$$A^k(U,\varepsilon,C) = [X_a \in C] \cap \bigcup_{\substack{s_1,\dots,s_{2k}\in U \\ s_1 \leq \dots \leq s_{2k}}} \bigcap_{i=1}^{k} [X_{s_{2i-1}} \in C, X_{s_{2i}} \in C, \varrho(X_{s_{2i-1}}, X_{s_{2i}}) \geq \varepsilon],$$

$A^k(a,b;\varepsilon,C) = A^k(Q(a,b),\varepsilon,C)$ und für $t \geq 0$
$\alpha(t,\varepsilon,C) = \alpha_{E'}(t,\varepsilon,C)$. Dann erhalten wir das

Korollar 1: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$P^x(A^k(a,b;4\varepsilon,C)) \leq (2\alpha(b-a,\varepsilon,C))^k$$

für alle $a,b \in Q^+$ mit $a \leq b$, für alle $x \in E'$, $\varepsilon > 0$ und $C \in \mathfrak{B}'$.

Beweis: Es ist $A^1(a,b;4\varepsilon,C) = A_{E'}(a,b;4\varepsilon,C)$. Daher folgt die Behauptung für k = 1 aus Lemma 5.
Sie sei nun richtig für ein $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen, daß sie dann auch für k+1 richtig ist: Seien $a,b \in Q^+$ mit $a \leq b$, $x \in E'$, $\varepsilon > 0$, $C \in \mathfrak{B}'$ und U eine endliche Teilmenge von Q(a,b). Für $\omega \in \Omega$ sei

$$T(\omega) = \inf\{t \in U : \omega \in A^k(U \cap [a,t],4\varepsilon,C)\}.$$

Dann ist $X_s(\omega) \in C$ für $T(\omega) = s \in U$, $[T = s] \in \mathfrak{F}_s$ für alle $s \in U$, $A^k(U,4\varepsilon,C) = \bigcup_{s\in U} [T = s]$ und

$$A^{k+1}(U,4\varepsilon,C) = \bigcup_{s\in U} ([T = s] \cap A^1(U \cap [s,b],4\varepsilon,C)).$$

Nach Lemma 5 ist daher

$$\begin{aligned} P^x(A^{k+1}(U,4\varepsilon,C)) &\leq \sum_{s\in U} P^x([T=s] \cap A^1(U \cap [s,b],4\varepsilon,C)) \\ &\leq 2\alpha(b-a,\varepsilon,C) \cdot \sum_{s\in U} P^x[T = s] \\ &\leq 2\alpha(b-a,\varepsilon,C) \cdot P^x(A^k(U,4\varepsilon,C)) \\ &\leq (2\alpha(b-a,\varepsilon,C))^{k+1}. \end{aligned}$$

Wenn U gegen Q(a,b) aufsteigt, dann steigt $A^{k+1}(U,4\varepsilon,C)$ auf gegen $A^{k+1}(a,b;4\varepsilon,C)$. Damit folgt die Behauptung für k+1.

Sei weiter für $b \in Q^+$, $\varepsilon > 0$, $C \in \mathfrak{B}'$ und $n \in \mathbb{N}$

$$A_n(b,\varepsilon,C) = \bigcap_{s \in Q(0,b)} [X_s \in C] \cap \bigcap_{\substack{s,t \in Q(0,b) \\ |s-t| \leq \frac{1}{n}}} [\varrho(X_s, X_t) \geq \varepsilon].$$

Dann erhalten wir

Korollar 2: Für jedes $\bar{b} \in \mathbb{N}$ mit $b \leq \bar{b}$ und jedes $x \in E'$ gilt

$$P^x(A_{2n}(b,4\varepsilon,C)) \leq 2(2\bar{b}+1)\, n\, \alpha_C(\tfrac{1}{n},\varepsilon,C).$$

Beweis: Je zwei $s,t \in Q(0,b)$ mit $|s-t| \leq \frac{1}{2n}$ sind enthalten in einer der Mengen $I_i = [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \cap Q^+$, $I^i = [\frac{i-1}{n} + \frac{1}{2n}, \frac{i}{n} + \frac{1}{2n}] \cap Q^+$ mit $0 < \frac{i}{n} \leq b$ oder in $[b - \frac{1}{n}, b]$. Daher ist

$$A_{2n}(b,4\varepsilon,C) \subset \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ \frac{i}{n} \leq b}} (A_C(I_i,4\varepsilon,C) \cup A_C(I^i,4\varepsilon,C)) \cup A_C(b-\tfrac{1}{n},b;4\varepsilon,C).$$

Da für jedes dieser höchstens $2\bar{b}n + 1 \leq (2\bar{b}+1)n$ Glieder der Vereinigung nach Lemma 5 die P^x-Wahrscheinlichkeit $\leq 2\alpha_C(\frac{1}{n},\varepsilon,C)$ ist, folgt die Behauptung.

Satz 1: Sei $(\Omega, \mathfrak{F}, P^x, (X_t))_{x \in E'}$ eine Familie von stochastischen Prozessen auf $(E', \mathfrak{B}')$, deren endlich-dimensionale Verteilungen durch die Übergangsoperatoren P'_t gegeben sind. Dann kann man jedes X_t so zu $\tilde{X}_t$ abändern auf einer Menge, deren Wahrscheinlichkeit Null ist für alle P^x, daß Δ absorbierender Punkt ist, die Pfade rechtsseitig stetig werden und höchstens beim Sprung nach Δ keinen linksseitigen Limes besitzen.

Beweis: Für $\varepsilon > 0$, $a,b \in Q^+$ mit $a \leq b$ und für $\omega \in \Omega$ sei

$$n_\varepsilon(a,b)(\omega) = \sup \{k \in \mathbb{N} : \omega \in A^k(a,b;\varepsilon,E')\}$$

(mit $\sup \emptyset = 0$). Die Abbildung $\omega \longrightarrow n_\varepsilon(a,b)(\omega)$ ist $\mathfrak{F}$-meßbar.

Sei $r \in Q^+$ und für jedes $C \in \mathfrak{C}'$ sei

$$A_r^C = \bigcap_{s \in Q(0,r)} [X_s \in C]$$

und

$$\Omega_r^C = A_r^C \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} [n_{\frac{1}{m}}(0,r) = +\infty].$$

Für alle l und m aus N ist offenbar

$$n_{\frac{1}{m}}(0,r) \leq \sum_{i=1}^{l} n_{\frac{1}{m}}(\tfrac{i-1}{l}r, \tfrac{i}{l}r) + (l-1).$$

Daher ist für alle $C \in \mathfrak{C}'$ und Folgen (l_m) aus $\mathbb{N}$

$$\Omega_r^C = A_r^C \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{l_m} [n_{\frac{1}{m}}(\tfrac{i-1}{l_m}r, \tfrac{i}{l_m}r) = +\infty]$$

$$\subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{l_m} \bigcap_{k=1}^{\infty} A^k(\tfrac{i-1}{l_m}r, \tfrac{i}{l_m}r; \tfrac{1}{m}, C).$$

Sei (K_n) eine Folge kompakter Teilmengen von E mit $K_n \subset K_{n+1}$ und $\bigcup K_n = E$. Nach dem Korollar 1 zu Lemma 5 ist für alle i,k,l,m,n $\in \mathbb{N}$ und $x \in E'$

$$P^x(A^k(\tfrac{i-1}{l}r, \tfrac{i}{l}r, \tfrac{1}{m}, K_n)) \leq (2\alpha(\tfrac{r}{l}, 4\tfrac{1}{m}, K_n))^k.$$

Zu jedem m und n können wir nach Lemma 3 ein l_m so groß wählen, daß

$$2\alpha(\tfrac{r}{l_m}, 4\tfrac{1}{m}, K_n) < 1$$

ist. Dann ist aber

$$P^x(\bigcap_{k=1}^{\infty} A^k(\tfrac{i-1}{l_m}r, \tfrac{i}{l_m}r; \tfrac{1}{m}, K_n)) = 0$$

für jedes $i = 1,\ldots,l_m$ und $x \in E'$. Also ist auch

$$P^x(\Omega_r^{K_n}) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E'$. Weiter ist nach dem Korollar zu Lemma 1 und 2

$$P^x(A_r^E \setminus \bigcup_n A_r^{K_n}) = 0.$$

Setzen wir nun

$$\Omega_0 = \bigcup_{r \in Q^+} (\bigcup_n \Omega_r^{K_n} \cup (A_r^E \setminus \bigcup_n A_r^{K_n})),$$

$$\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0.$$

Dann ist $P^x(\Omega_o) = 0$ für alle $x \in E'$. Sei weiter für $\omega \in \Omega$

$$\zeta^Q(\omega) = \inf \{t \in Q^+ : X_t(\omega) = \Delta\}.$$

Dann ist für jedes $\omega \in \Omega_1$ und $r \in Q^+$ mit $r < \zeta^Q(\omega)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ $n_{\frac{1}{m}}(0,r) < +\infty$ und $W_r(\omega) = \{X_s(\omega) : s \in Q(0,r)\}$ enthalten in einem K_n. Für $\omega \in \Omega_1$ und $t < \zeta^Q(\omega)$ existieren daher $\lim_{s \downarrow t, s \in Q} X_s(\omega)$ und (natürlich nur für $t > 0$) $\lim_{s \uparrow t, s \in Q} X_s(\omega)$, und beides sind Punkte aus E. Setzen wir nun für $\omega \in \Omega_1$

$$\tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s \to t \\ s \in Q^+, s > t}} X_s(\omega), & t < \zeta^Q(\omega) \\ \Delta, & t \geq \zeta^Q(\omega) \end{cases}$$

und für $\omega \in \Omega_o$

$$\tilde{X}_t(\omega) = \Delta, \quad t \geq 0$$

und definieren wir ζ durch

$$\zeta(\omega) = \begin{cases} \zeta^Q(\omega), & \omega \in \Omega_1 \\ 0, & \omega \in \Omega_o, \end{cases}$$

so erhalten wir: Für alle $\omega \in \Omega$ ist $\tilde{X}_t(\omega) \in E$ für alle $t < \zeta(\omega)$, $\tilde{X}_t(\omega) = \Delta$ für alle $t \geq \zeta(\omega)$ und die Abbildung $t \longrightarrow \tilde{X}_t(\omega)$ rechtsseitig stetig und ohne linksseitigen Limes höchstens für $t = \zeta(\omega)$. Es ist also nur noch zu zeigen

$$\tilde{X}_t = X_t \quad P^x\text{-f.s.}$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in E'$.
Sei $x \in E'$, $t \geq 0$ und sei (s_n) eine Folge aus Q^+ mit $s_n > t$ und $s_n \downarrow t$. Nach Definition von $\tilde{X}_t$ ist dann

$$\tilde{X}_t = \lim_{n \to \infty} X_{s_n} \quad P^x\text{-f.s. auf } [t < \zeta].$$

Auf $[t \geq \zeta]$ ist $\tilde{X}_t = \Delta$ und es ist

$$[t \geq \zeta] \cap \Omega_1 \cap \bigcup_n [X_{s_n} \neq \Delta] \subset \bigcup_n ([t \geq \zeta^Q] \cap [X_{s_n} \neq \Delta])$$

$$\subset \bigcup_n \bigcup_{s \in Q^+, s < s_n} [X_s = \Delta, X_{s_n} \neq \Delta].$$

Für $s < s_n$ ist aber $P^x[X_s = \Delta, X_{s_n} \neq \Delta] = 0$. Also ist auf

$[t \geqslant \zeta]$ auch $X_{s_n} = \Delta$ jedenfalls P_x-f.s., also $\lim_{n\to\infty} X_{s_n} = \Delta$ P^x-f.s. Daher ist

$$\tilde{X}_t = \lim_{n\to\infty} X_{s_n} \qquad P^x\text{-f.s.}$$

Sei K eine kompakte Teilmenge von E und $\varepsilon > 0$. Wegen der schwachen Markoffeigenschaft ist für alle n

$$P^x\left[X_t \in K, \varrho(X_t, X_{s_n}) \geqslant \varepsilon\right] \leqslant \alpha(s_n - t, \varepsilon, K).$$

Nach Lemma 3 folgt daraus, daß die Folge (X_{s_n}) auf $[X_t \in K]$ stochastisch gegen X_t konvergiert. Daher konvergiert (X_{s_n}) auf $[X_t \in E]$ stochastisch gegen X_t, aber auch auf $[X_t = \Delta]$, denn da ist $X_{s_n} = \Delta$ P^x-f.s. für alle n. Andererseits konvergiert (X_{s_n}) P^x-f.s. gegen $\tilde{X}_t$. Es ist also

$$\tilde{X}_t = X_t \qquad P^x\text{-f.s.}$$

Zu einem normalen Markoffprozeß (im Sinne der Definition in [3]) fehlt uns jetzt im wesentlichen nur die Existenz von Operatoren θ_t auf Ω mit $\tilde{X}_s \circ \theta_t = \tilde{X}_{s+t}$. Da können wir so vorgehen:

Sei $\bar{\Omega}$ die Menge aller Abbildungen $\bar{\omega}$ von $\mathcal{T}$ in E', die rechtsseitig stetig sind, für die aus $\bar{\omega}(t) = \Delta$ folgt $\bar{\omega}(t+s) = \Delta$ für alle $s,t \in \mathcal{T}$ und die einen linksseitigen Limes besitzen in jedem t mit $\bar{\omega}(t) \neq \Delta$. Für jedes $t \in \mathcal{T}$ und $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ sei $\bar{X}_t(\bar{\omega}) = \bar{\omega}(t)$ und $\bar{\theta}_t(\bar{\omega})$ die Abbildung $s \longrightarrow \bar{\omega}(t+s)$. Dann ist offenbar jedes θ_t eine Abbildung von $\bar{\Omega}$ in $\bar{\Omega}$ und $\bar{X}_s \circ \bar{\theta}_t = \bar{X}_{s+t}$ für alle $s,t \in \mathcal{T}$. Es sei $\bar{\mathcal{F}}$ die von allen $\bar{X}_t$ erzeugte σ-Algebra auf $\bar{\Omega}$.

Sei nun $(\Omega, \mathcal{F}, P^x, (X_t))_{x \in E'}$ und $(\tilde{X}_t)$ wie in Satz 1. Dann definieren wir $\varphi: \Omega \longrightarrow \bar{\Omega}$ durch $\varphi(\omega) = (t \longrightarrow \tilde{X}_t(\omega))$.

Dann ist $\tilde{\varphi}^{-1}[\bar{X}_t \in B] = [\tilde{X}_t \in B]$ für alle $t \in \mathcal{T}$ und $B \in \mathfrak{B}'$. Also ist φ $\mathfrak{f}$-$\bar{\mathfrak{f}}$-meßbar. Setzen wir $\bar{P}^x = \varphi(P^x)$, so ist für alle $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$, $B_1, \ldots, B_n \in \mathfrak{B}'$ und $x \in E'$

$$\bar{P}^x[\bar{X}_{t_1} \in B_1, \ldots, \bar{X}_{t_n} \in B_n] = P^x[\tilde{X}_{t_1} \in B_1, \ldots, \tilde{X}_{t_n} \in B_n]$$

$$= P^x[X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n] = P'_{t_1}(I_{B_1} \cdot \ldots \cdot P'_{t_n - t_{n-1}} I_{B_n}).)(x).$$

Also ist $(\bar{\Omega}, \bar{\mathfrak{f}}, \bar{X}_t, \bar{\theta}_t, \bar{P}^x)$ ein normaler Markoffprozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{B})$, der (P_t) als Übergangshalbgruppe hat. Damit haben wir

Theorem 1: Es gibt einen normalen Markoffprozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{B})$, (P_t) als Übergangshalbgruppe und Pfaden, die rechtsseitig stetig sind und auf $[0, \zeta)$ linksseitige Limiten besitzen.

Bemerkung:
Sei $(\Omega, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ ein Markoffprozeß auf $(E, \mathfrak{B})$. Sei $\bar{\mathfrak{M}}$ die Vervollständigung von $\mathfrak{M}$ bezüglich der Familie $\{P^x : x \in E'\}$, $\bar{\mathfrak{M}}_t$ die Vervollständigung von $\mathfrak{M}_t$ in $\bar{\mathfrak{M}}$ bezüglich der gleichen Familie (s. [3], I,5) und $\mathfrak{B}^*$ die universelle Komplettierung von $\mathfrak{B}$. Dann ist $(\Omega, \bar{\mathfrak{M}}, \bar{\mathfrak{M}}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ ein Markoffprozeß auf $(E, \mathfrak{B}^*)$ (s. [3], I,5).

Satz 2: Es gelte zusätzlich (P_4) und es sei $(\Omega, \mathfrak{f}, P^x, (X_t))_{x \in E'}$ eine Familie von stochastischen Prozessen auf $(E', \mathfrak{B}')$, deren endlich-dimensionale Verteilungen durch die Übergangsoperatoren P'_t gegeben sind. Dann kann man jedes X_t so zu $\tilde{X}_t$ abändern auf einer Menge, deren Wahrscheinlichkeit Null ist für alle P^x, daß Δ absorbierender Punkt ist, die Pfade rechtsseitig stetig werden und unstetig höchstens beim Sprung nach Δ.

Beweis: Sei $x \in E'$ und $r \in Q^+$. S_r sei die Menge aller $\omega \in \Omega$, deren Pfade auf $Q(0,r)$ nicht gleichmäßig stetig

sind, also

$$S_r = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overbrace{\bigcup_{\substack{s,t\in Q(0,r)\\ |s-t|\le \frac{1}{n}}}} [\varrho(X_s,X_t) \ge \tfrac{1}{m}].$$

Weiter sei für jedes $C \in \mathfrak{B}'$

$$A_r^C = \overbrace{\bigcup_{a\in Q(0,r)}} [X_s \in C] \quad \text{und} \quad \Omega_r^C = A_r^C \cap S_r.$$

Sei (K_n) eine Folge kompakter Teilmengen von E mit $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ und $\bigcup K_n = E$. Nach dem Korollar zu Lemma 1 und 2 ist dann

$$P^x(A_r^E \setminus \bigcup_n A_r^{K_n}) = 0$$

und daher erst recht

$$P^x(\Omega_r^E \setminus \bigcup_n \Omega_r^{K_n}) = 0.$$

Wegen (P_4) ist aber nach dem Korollar 2 zu Lemma 5

$$P^x(\Omega_r^{K_n}) = 0$$

für alle n. Also ist auch $P^x(\Omega_r^E) = 0$. Setzen wir nun

$$\Omega_0 = \bigcup_{r\in Q^+} (\Omega_r^E \cup (A_r^E \setminus \bigcup_n A_r^{K_n})),$$

$$\Omega_1 = \Omega \setminus \Omega_0.$$

Dann ist $P^x(\Omega_0) = 0$ für alle $x \in E'$. Setzen wir wieder $\zeta^Q(\omega) = \inf\{t \in Q^+ : X_t(\omega) = \Delta\}$, dann ist für jedes $\omega\in\Omega_1$ und $r \in Q^+$ mit $r < \zeta^Q(\omega)$ die Abbildung $s \longrightarrow X_s(\omega)$ auf $Q(0,r)$ gleichmäßig stetig und $W_r(\omega) = \{X_s(\omega) : s \in Q(0,r)\}$ enthalten in einem K_n. Daher können wir für $\omega \in \Omega_1$ definieren

$$(*) \qquad \tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{\substack{s\to t\\ s\in Q^+}} X_s(\omega) & , \quad t < \zeta^Q(\omega) \\ \Delta & , \quad t \ge \zeta^Q(\omega). \end{cases}$$

Setzen wir noch für $\omega\in\Omega_0$

$$\tilde{X}_t(\omega) = \Delta \quad , \quad t \ge 0,$$

so erhalten wir: Für ζ, definiert durch

$$\zeta(\omega) = \begin{cases} \zeta^Q(\omega) & , \quad \omega \in \Omega_1 \\ 0 & , \quad \omega \in \Omega_0, \end{cases}$$

ist $\tilde{X}_t(\omega) = \Delta$ für alle $t \geq \zeta(\omega)$, $\tilde{X}_t(\omega) \in E$ für alle $t < \zeta(\omega)$ und die Abbildung $t \longrightarrow \tilde{X}_t(\omega)$ stetig auf $[0, \zeta(\omega))$ für alle $\omega \in \Omega$. Wie im Beweis von Satz 1 ergibt sich außerdem für alle $t \geq 0$ und $x \in E'$

$$\tilde{X}_t = X_t \qquad P^x\text{-f.s.}$$

Wir definieren jetzt $\bar{\Omega}$ als die Menge aller Abbildungen $\bar{\omega}$ von $\mathcal{T}$ in E', für die aus $\bar{\omega}(t) = \Delta$ folgt $\bar{\omega}(t+s) = \Delta$ für alle $s,t \in \mathcal{T}$ und die stetig sind in jedem t mit $\bar{\omega}(t) \neq \Delta$. Wenn wir im übrigen die gleiche Konstruktion durchführen wie im Anschluß an Satz 1, nur unter Verwendung von Satz 2, so erhalten wir als Korollar das

Theorem 2: Es gelte zusätzlich (P_4). Dann gibt es einen normalen Markoffprozeß mit Zustandsraum $(E, \mathfrak{G})$, (P_t) als Übergangshalbgruppe und Pfaden, die rechtsseitig stetig sind und unstetig höchstens beim Sprung nach Δ.

Die starke Markoffeigenschaft und die Quasi-Stetigkeit ergeben sich nun gemäß den folgenden beiden Sätzen.

Satz 3: Sei $(\Omega, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_t, X_t, \theta_t, P^x)$ ein Markoffprozeß auf $(E, \mathfrak{G}^*)$ mit (P_t) als Übergangshalbgruppe, rechtsseitig stetigen Pfaden, und es gelte (P_3). Dann ist $(\Omega, \mathfrak{M}, \mathfrak{M}_{t+}, X_t, \theta_t, P^x)$ stark markoffsch.

Beweis: Es sei T eine Stopzeit bezüglich $\mathfrak{M}_{t+}$, also $[T < t] \in \mathfrak{M}_{t+}$ für alle $t \geq 0$. Ihre σ-Algebra $\mathfrak{M}_{T+}$ besteht dann aus allen $A \in \mathfrak{M}$ mit $A \cap [T < t] \in \mathfrak{M}_{t+}$. Wir bemerken zunächst, daß X_T wegen rechtsseitiger Stetigkeit der Pfade $\mathfrak{M}_{T+}$-$\mathfrak{G}^*$-meßbar ist (vergl. Beweis von

Theorem I,8.11 in [3]). Weiter definieren wir wie üblich eine Folge (T_n) von Stopzeiten durch

$$T_n(\omega) = \begin{cases} \frac{i}{2^n} , & \frac{i-1}{2^n} \leq T(\omega) < \frac{i}{2^n} \quad (i \in \mathbb{N}) \\ +\infty , & T(\omega) = +\infty. \end{cases}$$

Sei $A \in \mathfrak{M}_{T+}$ und $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $r \in R_n = \left\{\frac{i}{2^n} : i \in \mathbb{N}\right\} \cup \{+\infty\}$ ist dann

$$A_r = A \cap [T_n = r] \in \mathfrak{M}_r.$$

Sei nun $x \in E'$, $t \geq 0$ und f eine stetige reelle Funktion auf E'. Wegen der Markoffeigenschaft (bezüglich $(\mathfrak{M}_t)$) ist dann

$$\int_A f(X_{T_n+t})\, dP^x = \sum_{r \in R_n} \int_{A_r} f(X_{r+t})\, dP^x$$

$$(*) \quad = \sum_{r \in R_n} \int_{A_r} P'_t f(X_r)\, dP^x = \int_A P'_t f(X_{T_n})\, dP^x.$$

Es ist $\lim T_n = T$ und daher wegen der rechtsseitigen Stetigkeit der Pfade $\lim X_{T_n} = X_T$ und $\lim X_{T_n+t} = X_{T+t}$. Daher strebt die linke Seite von $(*)$ gegen

$$\int_A f(X_{T+t})\, dP^x.$$

Betrachten wir nun die rechte Seite von $(*)$. Auf $[\zeta \leq T]$ ist $X_T = \Delta$ und $X_{T_n} = \Delta$ für alle n, also $P'_t f(X_T) = \lim P'_t f(X_{T_n})$. Weiter ist f als stetige Funktion auf E' gleich $g + c$ mit $g \in \mathcal{C}_0$ und $c \in \mathbb{R}$. Es ist also

$$P'_t f = P_t g + c.$$

Nun ist aber $P_t g$ stetig auf E (nicht notwendig auf E'!), also auch $P'_t f$. Auf $[T < \zeta] = [X_T \in E]$ ist wegen $\lim X_{T_n} = X_T$ für schließlich alle n $X_{T_n} \in E$. Daher ist $\lim P'_t f(X_{T_n}) = P'_t f(X_T)$ auch auf $[T < \zeta]$. Also strebt die rechte Seite gegen

$$\int_A P'_t f(X_T)\, dP^x.$$

Es ist daher

$$\int_A f(X_{T+t})\, dP^x = \int_A P'_t f(X_T)\, dP^x.$$

Diese Gleichung gilt für alle stetigen reellen Funktionen f auf E' und daher auch für alle $f \in \mathcal{B}'_b$. Also gilt die starke Markoffeigenschaft.

Bemerkung:
(P_3) kann durch die schwächere Bedingung "$V_\lambda f \in \mathcal{C}$ für alle $f \in \mathcal{K}$ und $\lambda > 0$" ersetzt werden (s.[3], Theorem I,8.11).

Satz 4: Sei X ein normaler starker Markoffprozeß mit rechtsseitig stetigen Pfaden, (P_t) als Übergangshalbgruppe und es gelte (P'_2). Dann ist X quasi-linksseitig stetig auf $[0,\infty)$.

Beweis: Sei f eine stetige reelle Funktion auf E', also $f = g + c$ mit $g \in \mathcal{C}_0$ und $c \in \mathbb{R}$. Wegen $P'_t f = P_t g + c$ ist dann

$$\lim_{t\to 0} \| P'_t f - f \| = \lim_{t\to 0} \| P_t g - g \| = 0.$$

Damit folgt die Behauptung nach [7], Theorem IV.9.

Zusammenfassend erhalten wir

Theorem 3: Sei $(P_t)_{t>0}$ eine Halbgruppe submarkoffscher Kerne auf $(E, \mathcal{E})$ mit (P_1), (P'_2) und (P_3). Dann gibt es einen Huntschen Prozeß X mit Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$, (P_t) als Übergangshalbgruppe und so, daß X quasi-linksseitig stetig ist auf $[0,\infty)$ und die Pfade linksseitige Limiten haben auf $[0,\infty)$.

Beweis: Theorem 1 (mit Bemerkung), Satz 3, Satz 4 und [3], I,8.14 und Übung I,9.).
Bemerkung:
Aufgrund der Bemerkung 3 auf S.20 ist Theorem 3 eine Verallgemeinerung des Satzes über die Existenz von Huntschen Prozessen zu Fellerschen Halbgruppen (s.[3],I,9.4).

Theorem 4: Sei $(P_t)_{t>0}$ eine Halbgruppe submarkoffscher Kerne auf $(E,\mathcal{E})$ mit (P_1), (P_2'), (P_3) und (P_4). Dann gibt es einen Huntschen Prozeß X mit Zustandsraum $(E,\mathcal{E})$, (P_t) als Übergangshalbgruppe und so, daß X quasi-linksseitig stetig ist auf $[0,\infty)$ und die Pfade linksseitige Limiten haben auf $[0,\infty)$ und stetig sind auf $[0,\zeta)$.

Beweis: Wie für Theorem 3, aber mit Theorem 2 statt Theorem 1.

III. ANWENDUNG IN DER AXIOMATISCHEN POTENTIALTHEORIE

X sei ein streng harmonischer Raum im Sinne der Axiomatik von H.Bauer (s.[2]), in dem die Konstanten superharmonisch sind. ${}_+\mathcal{H}_X$ sei die Menge aller positiven hyperharmonischen Funktionen auf X und $\mathcal{P}$ die Teilmenge der stetigen beschränkten Potentiale. Für $p \in \mathcal{P}$ wollen wir unter $S(p)$ die kleinste abgeschlossene Menge verstehen, in deren Komplement p harmonisch ist. $\mathcal{B}, \mathcal{K}, \mathcal{C}$ usw. seien wie bisher definiert (mit X statt E).

1. Konstruktion eines Potentials

Jede Funktion aus $\mathcal{K}$ läßt sich gleichmäßig durch Differenzen $u - v$ mit $u,v \in \mathcal{P}$ und kompakten $S(u)$ und $S(v)$ approximieren. Daher gibt es eine abzählbare Menge $\mathcal{P}_\mathcal{K} = \{u'_1, u'_2, \ldots\}$ von solchen Potentialen mit

$$\mathcal{K} < \overline{\mathcal{P}_\mathcal{K} - \mathcal{P}_\mathcal{K}}.$$

Wir setzen $u_n = (2^n \|u'_n\|)^{-1} u'_n$, falls $u'_n \neq 0$, $u_n = 0$, falls $u'_n = 0$, und

$$u = \sum u_n.$$

Es ist dann $u \in \mathcal{P}$.

Weiter sei $\mathfrak{U}$ eine abzählbare Basis von X aus relativkompakten Mengen, die abgeschlossen ist gegen endliche Vereinigung. $\mathfrak{T} = \{S_1, S_2, \ldots\}$ sei die Menge aller Paare (U,V) mit $U,V \in \mathfrak{U}$ und $\bar{U} < V$. v sei ein strenges Potential aus $\mathcal{P}$.

Zu $S = (U,V) \in \mathfrak{T}$ gibt es ein $f \in \mathcal{K}^+$ mit $f \leq 1$, $f = 1$ auf $\bar{U}$ und $f = 0$ in $\complement V$. Wir setzen

$$v_S^1 = R_{fv} \quad \text{und} \quad v_S^2 = R_{(1-f)v_S^1}.$$

Dann sind $v_S^1, v_S^2 \in \mathcal{P}$, und es ist $v_S^2 \leq v_S^1 < v$. In $\complement \bar{V}$ ist v_S^1 harmonisch und $v_S^2 = v_S^1$, also auch v_S^2 harmonisch. In U

dagegen ist $v_S^1 = v$, also streng superharmonisch, und v_S^2 harmonisch. Also ist $v_S^2 < v_S^1$ in U.
Auf diese Weise seien v_S^1 und v_S^2 zu jedem $S \in \mathfrak{T}$ definiert und es sei

$$w = \sum 2^{-i}(v_{S_i}^1 + v_{S_i}^2) \quad .$$

und

$$p = u + w.$$

Es ist $w \in \mathcal{P}$, also auch $p \in \mathcal{P}$.

2. Konstruktion eines Kernes

Unter einer Zerlegung δ von p verstehen wir endlich viele Potentiale, deren Summe p ist. Eine Zerlegung $\delta = (p_1,\ldots, p_n)$ heiße feiner als eine Zerlegung $\delta' = (p_1',\ldots,p_{n'}')$, kurz: $\delta \prec \delta'$, wenn es eine Partition von $\{1,\ldots,n\}$ in Mengen I_j gibt mit $\sum_{i\in I_j} p_i = p_j'$ $(j = 1,\ldots n')$. Die Menge Δ aller Zerlegungen von p wird dadurch zu einer linksgerichteten Menge.
Für $f \in \mathfrak{K}^+$ und $\delta \in \Delta$ definieren wir

$$\underline{V}^{\delta} f = \sum_{q\in\delta} \inf f(S(q))\, q.$$

$\underline{V}^{\delta} f$ ist ein stetiges Potential und $\leqslant \|f\| p$. Für $\delta \prec \delta'$ ist $\underline{V}^{\delta'} f \leqslant \underline{V}^{\delta} f$, also ist $(\underline{V}^{\delta} f)_{\delta\in\Delta}$ aufsteigend filtrierend.

$$Vf = \sup_{\delta\in\Delta} \underline{V}^{\delta} f$$

ist daher hyperharmonisch und $\leqslant \|f\| p$, also ein beschränktes Potential. Definieren wir

$$\bar{V}^{\delta} f = \sum_{q\in\delta} \sup f(S(q))\, q,$$

so ist $\bar{V}^{\delta} f \leqslant \bar{V}^{\delta'} f$ für $\delta \prec \delta'$ und $\underline{V}^{\delta} f \leqslant \bar{V}^{\delta} f$ für alle $\delta \in \Delta$. Zu $\delta', \delta'' \in \Delta$ gibt es ein $\delta \in \Delta$ mit $\delta \prec \delta'$ und $\delta \prec \delta''$, so daß also

$$\sup_{\delta\in\Delta} \underline{V}^{\delta} f \leqslant \inf_{\delta\in\Delta} \bar{V}^{\delta} f$$

und

$$\inf_{\delta\in\Delta} \bar{V}^{\delta} f - \sup_{\delta\in\Delta} \underline{V}^{\delta} f \leqslant \inf_{\delta\in\Delta} (\bar{V}^{\delta} f - \underline{V}^{\delta} f)$$

$$\leqslant p \cdot \inf_{\delta \in \Delta} \sup_{q \in \delta} (\sup f(S(q)) - \inf f(S(q))).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es aber offene Teilmengen $U_1, \ldots, U_n$ von X mit $\bigcup U_i = X$ und $\sup f(\bar{U}_i) - \inf f(\bar{U}_i) \leqslant \varepsilon$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Weiter gibt es eine Zerlegung $\delta = (q_1, \ldots, q_n)$ von p mit $S(q_i) \subset \bar{U}_i$, so daß also $\sup f(S(q_i)) - \inf f(S(q_i)) \leqslant \varepsilon$ ist für alle $i = 1, \ldots, n$. Daher ist die rechte Seite der Ungleichung Null, also

$$Vf = \sup_{\delta \in \Delta} \underline{V}^{\delta} f = \inf_{\delta \in \Delta} \overline{V}^{\delta} f.$$

Daraus folgt sofort die Additivität der Abbildung $f \longrightarrow Vf$ ($f \in \mathcal{X}^+$). Weil diese Abbildung außerdem isoton und positiv homogen ist, läßt sie sich auf genau eine Weise zu einem Kern V auf $(X, \mathcal{S})$ fortsetzen.

3. Eigenschaften

Wir zeigen, daß V mit $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_b$ die Voraussetzungen von I, §3 erfüllt:

a. Sei $g \in \mathcal{B}_b^+$ und nach unten halbstetig. Dann existieren $f_n \in \mathcal{X}^+$ mit $f_n \uparrow g$. Es ist jedes Vf_n ein Potential $\leqslant \|g\| p$, also auch Vg. Insbesondere ist $V1 \leqslant p$, also V ein beschränkter Kern.

Sei $f \in \mathcal{B}_b^+$. Die Menge $\Phi(f)$ aller nach unten halbstetigen Majoranten von f ist absteigend filtrierend und daher

$$Vf = \inf_{\varphi \in \Phi(f)} V\varphi$$

eine nahezu hyperharmonische Funktion. Das gleiche gilt für $V(\|f\| - f)$. Da aber die Summe

$$(*) \qquad Vf + V(\|f\| - f) = \|f\| V1$$

ein beschränktes Potential ist, ist es auch jeder Summand.

p hat die Form $p = \sum_{i=1}^{\infty} p_i$ mit $p_i \in \mathcal{P}$ und kompakten $S(p_i)$. Für $\delta = (p_1, \ldots, p_n, \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i)$ und $f \in \mathcal{X}^+$ mit $f \leqslant 1$ und $f = 1$ auf $S(p_1 + \ldots + p_n)$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant \underline{V}^{\delta} f \leqslant Vf \leqslant V1.$$

Also ist $p \leqslant V1$ und daher

$$V1 = p.$$

Aus $(*)$ folgt daher sogar $Vf \in \mathcal{P}$. Es ist also

$$V(\mathcal{B}_b^+) \subset \mathcal{P}$$

und damit $V'\mathcal{B}_b \subset \mathcal{B}_b \cap \mathcal{C}$. Es gilt daher $(V_{\cdot,\cdot})$.

b. Das vollständige Maximumprinzip.

Lemma: Sei $s \in {}_+\mathcal{H}^*_\chi$, $q \in \mathcal{P}$ und $s \geq q$ auf $S(q)$.
Dann ist $s \geq q$.

Beweis: $s - q$ ist hyperharmonisch in $U = \complement S(q)$, nach unten beschränkt durch $-q$, und für $z \in U^* \subset S(q)$ gilt

$$\liminf_{\substack{x \to z \\ x \in U}} (s - q)(x) \geq \liminf_{x \to z} (s - q)(x)$$
$$= s(z) - q(z) \geq 0.$$

Daher ist $s - q \geq 0$ auch in $\complement S(q)$.

Korollar: Sei $s \in {}_+\mathcal{H}^*_\chi$. Dann ist s dominant.
Beweis: Seien $f, g \in \mathcal{X}$ mit

$$s + Vf \geq Vg \qquad \text{auf } [g > 0].$$

Für $\delta \in \Delta$ ist $Vg \geq \underline{V}^\delta g$, $S(\underline{V}^\delta g) \subset [g > 0]$, also nach dem Lemma

$$s + Vf \geq \underline{V}^\delta g.$$

Daher ist auch $s + Vf \geq Vg$.
Weil $V(\mathcal{X})$ in $\mathcal{C}$ enthalten und $V1 = p$ streng positiv ist, ist damit nach Bemerkung 3 auf S.10 gezeigt, daß s dominant ist.

Insbesondere sind alle $s \in \mathcal{B}^*$ dominant, d.h. V genügt dem vollständigen Maximumprinzip.

c. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $v_n \in \mathcal{P} \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{B}_b$, $p - v_n \in \mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ und $v_n + (p - v_n) = p = V1 \in \overline{V'\mathcal{B}_b}$. Daher ist jedes v_n in $\mathcal{D}^*$ und damit auch jedes v'_n. Es ist also

$$\mathcal{K} \subset \overline{\mathcal{P}_\mathcal{K} - \mathcal{P}_\mathcal{K}} \subset \overline{\mathcal{B}^* - \mathcal{D}^*},$$

d.h. es gilt (K_2).

d. Sei $f \in \mathcal{B}_b^+$ und $q = Vf$. Wir wählen eine isotone Folge (f_n) aus $\mathcal{K}^+$ mit $\bigcup [f_n = 1] = X$. Dann ist $q - R_{(1-f_n)}q$ in $\mathcal{K}^+$ und $R_{(1-f_n)}q \in \mathcal{P} \subset \mathcal{D}$ für alle n. $\lim R_{(1-f_n)}q$ ist eine harmonische Minorante von q, also gleich Null. Daher gilt (K_3).

e. Sei K eine kompakte Teilmenge von X und W eine Umgebung von K. Dann existiert ein $S_i = (U,V) \in \mathcal{T}$ mit $K \subset U$, $\bar{V} \subset \mathring{W}$. Es sind $v^2_{S_i}$, $v^1_{S_i} \in \mathcal{P} \subset \mathcal{D} \wedge \mathcal{L}$, $v^2_{S_i} \leq v^1_{S_i}$, $v^2_{S_i} < v^1_{S_i}$ auf K und $v^2_{S_i} = v^1_{S_i}$ in $\complement W$. Es ist also zum Nachweis von (K_4) nur noch ein $h \in \mathcal{K}^+$ zu finden mit $h = 0$ in $\complement W$ und $Vh - v^2_{S_i} \in \mathcal{D}$.

Sei $h \in \mathcal{K}^+$ mit $0 \leq h \leq 2^i$, $h = 2^i$ auf $\bar{V}$ und $h = 0$ in $\complement W$. Sei $s = 2^{-i} v^2_{S_i}$, so daß also $p - s \in \mathcal{P}$ ist. Dann ist

$$Vh = \sup_{\substack{q_1,\ldots,q_n \in \mathcal{P} \\ q_1,\ldots,q_n = s}} \sum_{i=1}^{n} \inf h(S(q_i))\, q_i$$

$$+ \sup_{\substack{q_1,\ldots,q_n \in \mathcal{P} \\ q_1,\ldots,q_n = p-s}} \sum_{i=1}^{n} \inf h(S(q_i))\, q_i .$$

Dabei liegt der zweite Summand in ${}_+\mathcal{K}^*_X$, und zwar aus dem gleichen Grund wie Vh. Im ersten Summanden ist jedes $S(q_i) \subset S(s) = S(v^2_{S_i}) \subset \bar{V}$, auf $\bar{V}$ ist aber $h = 2^i$. Daher ist der erste Summand gleich $2^i s$, also gleich $v^2_{S_i}$. Es ist also $Vh - v^2_{S_i} \in {}_+\mathcal{K}^*_X \subset \mathcal{D}$ und damit (K_4) gezeigt.

Bemerkung:
Wir haben von den Axiomen des harmonischen Raumes (s. [2], S.11) nicht in vollem Umfang Gebrauch gemacht. Wir wären mit einem schwächeren Konvergenzaxiom ausgekommen, nämlich mit (K_1) aus [1].

Damit erhalten wir

Satz: Es existiert ein beschränkter Kern V mit $V(\mathcal{B}_b) \subset \mathcal{C}$ auf $(X, \mathcal{C})$ mit der Eigenschaft:
Eine positive, nach unten halbstetige numerische Funktion s auf X ist genau dann hyperharmonisch, wenn für alle $f,g \in \mathcal{B}^+$ aus

$$s + Vf \geq Vg \quad \text{auf } [g > 0]$$

folgt

$$s + Vf \geq Vg.$$

Beweis: Kapitel I, §3, Korollar 2 mit $\mathcal{S} = {}_+\mathcal{H}^*_X$.

Theorem 1: Es existiert eine Halbgruppe (P_t) submarkoffscher Kerne auf $(X, \mathcal{C})$ mit den Eigenschaften (P_1), (P_2'), (P_3) und (P_4) (s.S.20), deren exzessive Funktionen gerade die positiven hyperharmonischen Funktionen sind.

Beweis: Kapitel I, §3, Korollar 1 und 2 mit $\mathcal{S} = {}_+\mathcal{H}^*_X$.

Bemerkung:
Nach [14], T64 auf S.242 ist aufgrund der nachfolgenden Betrachtung sogar jede universell meßbare exzessive Funktion hyperharmonisch: Sei g eine positive, beschränkte, universell meßbare reelle Funktion auf X. Zu einer abzählbaren, dichten Teilmenge A von X gibt es dann $f_1, f_2 \in \mathcal{B}_b^+$ mit $f_1 \leq g \leq f_2$ und $Vf_1(x) = Vf_2(x)$ für alle $x \in A$. Da Vf_1 und Vf_2 stetig sind, ist dann $Vf_1 = Vf_2$, also $Vg = Vf_1 \in {}_+\mathcal{H}^*_X$ wegen $Vf_1 \leq Vg \leq Vf_2$.

Theorem 2: Es existiert auf X ein Huntscher Prozeß, der quasi-linksseitig stetig ist auf $[0,\infty)$, dessen Pfade linksseitige Limiten haben auf $[0,\infty)$ und stetig sind auf $[0,\zeta)$ und dessen exzessive Funktionen gerade die positiven hyperharmonischen Funktionen auf X sind.

Beweis: Theorem 1 und Kapitel II.

Bemerkung:
Die Stetigkeit der Pfade hätten wir ohne Benutzung von (K_4) und (P_4) auch auf folgende Weise erhalten können: Nach Kapitel II, Theorem 3 existiert ein Huntscher Prozeß auf X, dessen exzessive Funktionen die positiven hyperharmonischen Funktionen sind. Für einen Punkt x aus einer regulären Menge U ist dann die Verteilung der ersten Treffer an $\complement U$ das harmonische Maß μ_x^U (s.[16],9-08). μ_x^U wird aber vom Rand von U getragen. Daher sind die Pfade fast sicher stetig (s.[8],8-42).

LITERATUR

[1] H.Bauer — Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen. Math. Annalen 146 (1962), 1 - 59.

[2] H.Bauer — Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Lecture Notes in Mathematics, Springer 1966, 22.

[3] R.M.Blumenthal and R.K.Getoor — Markov Processes and Potential Theory. Academic Press 1967.

[4] N.Boboc, C.Constantinescu and A.Cornea — Axiomatic theory of harmonic functions.- Nonnegative superharmonic functions. Ann. Inst. Fourier 15/1 (1965), 283 - 312.

[5] N.Boboc, C.Constantinescu and A.Cornea — Semigroups of transitions on harmonic spaces. Revue Roum. Math. Pures Appl. Erscheint demnächst.

[6] R.Cairoli — Produits de semi-groupes de transition et produits de processus. Publ. Inst. Statistique Univ. Paris, 4 (1966).

[7] Ph.Courrège — Théorie des processus de Markov. Cours multigraphié, Paris 1964.

[8] Ph.Courrège, P.Prioret
Axiomatique du problème de Dirichlet et processus de Markov.
Séminaire Brelot-Choquet-Deny, 8e année, n° 8 (1963/64).

[9] E.B.Dynkin
Die Grundlagen der Theorie der Markoffschen Prozesse.
Springer 1961.

[10] E.B.Dynkin
Markov Processes I,II.
Springer 1965.

[11] R.M.Hervé
Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel.
Ann. Inst. Fourier 12 (1962), 415 - 571.

[12] K.Yosida
Functional Analysis.
Springer 1965.

[13] P.-A.Meyer
Brelot's axiomatic theory of the Dirichlet problem and Hunt's theory.
Ann. Inst. Fourier 13/2 (1963), 357 - 372.

[14] P.-A.Meyer
Probabilités et potentiel.
Publ. Inst. math. Univ. Strasbourg XIV (1966).

[15] G.Lion
Principe complet du maximum et semi-groupes sous-markoviens.
C. R. Acad. Sc. Paris, t.258 (1964).

[16] Séminaire Brelot-Choquet-Deny (Théorie du Potentiel), 5e année (1960/61).

Lebenslauf

Am 20.9.1940 wurde ich, Wolfhard Hansen, als erstes von vier Kindern des Oberlehrers Rolf Hansen und seiner Ehefrau Irmgard, geb. Dudenbostel, in Hamburg geboren. In Reinbek bei Hamburg besuchte ich von Ostern 1947 bis Ostern 1951 die Volksschule und dann die Sachsenwaldschule, ein neusprachliches und mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium. Im Frühjahr 1960 legte ich an dieser Schule im mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweig die Reifeprüfung ab.

Gefördert von der Studienstiftung des deutschen Volkes, studierte ich vom Sommersemester 1960 bis zum Sommersemester 1965 Mathematik und Physik an der Universität Hamburg, zunächst vor allem bei Herrn Prof.Dr.E.Artin. Zusammen mit anderen Kommilitonen schrieb ich während dieser Zeit Ausarbeitungen einiger seiner Vorlesungen. Später studierte ich bei Herrn Prof.Dr.H.Bauer, dem ich wie Herrn Professor Artin fachlich und menschlich viel verdanke. Von Januar 1963 an war ich bei ihm wissenschaftliche Hilfskraft.

Im Herbst 1963 legte ich die Vorprüfung zum Staatsexamen in Philosophie und Pädagogik ab und im Winter 1964/65 das Staatsexamen selbst. Im Herbst 1965 bin ich Herrn Professor Bauer an die Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg gefolgt. Seitdem bin ich als Assistent bei ihm tätig.

Im Februar 1966 heiratete ich Luise Klesser. Wir haben einen Sohn.

Offsetdruck - Fotodruck
– J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109, (Nähe Martin-Luther-Platz) Telefon 22990 –